

方程式・不等式・最大最小

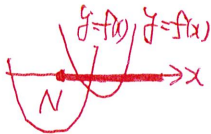
[第1問]

N を正の整数とする。 $2N$ 以下の正の整数 m, n からなる組 (m, n) で、
方程式 $x^2 - nx + m = 0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか。

(09 東工大)

$$f(x) = x^2 - nx + m \text{ とおく。}$$

$$(1 \leq m \leq 2N, 1 \leq n \leq 2N)$$

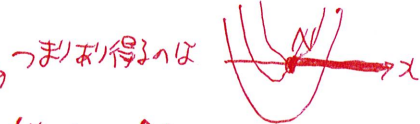


$$f(x) = (x - \frac{n}{2})^2 - \frac{n^2}{4} + m \text{ より}$$

$$\left(\text{軸 } x = \frac{n}{2} \text{ が } N \text{ より大か小か、で場合分け。} \right)$$

$$\text{いかに、} \frac{1}{2} \leq \frac{n}{2} \leq N \text{ なら、}$$

N 以上の実数解をもつことはよい。



つまり、得るのは $f(N) \leq 0$ とおればよい。

$$\therefore N^2 - nN + m \leq 0 \leftarrow \text{これをみたす自然数 } m, n \text{ の組数を求める。}$$

$$\Leftrightarrow (1 \leq) m \leq N(n - N)$$

$$\text{おと、} m \text{ は } \begin{cases} 1 \leq m \leq N(n - N) \dots \textcircled{1} \\ 1 \leq m \leq 2N \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$(i) n \geq N+2 \text{ のとき、} (N+2 \leq n \leq 2N)$$

$$\textcircled{1} \text{ か } \textcircled{2} \text{ は } \textcircled{2} \text{ とおす。} m \text{ は } 2N \text{ 以下}$$

$$m \text{ は } N+2 \leq n \leq 2N \text{ の}$$

$$(2N - (n - N) + 1 = N - 1 \text{ 通り})$$

$$(ii) n = N+1 \text{ のとき}$$

$$\textcircled{1} \text{ か } \textcircled{2} \text{ は } \textcircled{1} \text{ とおす。} m \text{ は } 1 \leq m \leq N \text{ の } N \text{ 通り。}$$

$$(iii) \text{ よ、} 2N(N-1) + N = (2N^2 - N) \text{ 通り。}$$

(06 島根大)

[第2問]

a と b を実数とする。 x の方程式

$$8^x - a(4^x - 1) + b(2^x - 1) - 1 = 0$$

が 0 または負である異なる 3 個の実数解をもつとき、 a と b が満たす条件を求め、それを図示せよ。

$$2^x = t \text{ とおくと } (0 < t \leq 1)$$

$$t^3 - a(t^2 - 1) + b(t - 1) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 1) - a(t-1)(t+1) + b(t-1) = 0$$

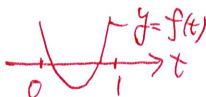
$$\Leftrightarrow (t-1)\{t^2 + t + 1 - a(t+1) + b\} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\{t^2 - (a-1)t - a + b + 1\} = 0$$

$$\therefore t = 1, t^2 - (a-1)t - a + b + 1 = 0 \dots \textcircled{1}$$

0 が $0 < t < 1$ に異なる 2 個の実数解をもつことはよい。

$$f(t) = t^2 - (a-1)t - a + b + 1 \text{ とおく}$$



$$(P) \text{ の } a \text{ 判別式を } D \text{ とおすと}$$

$$D = (a-1)^2 - 4(-a+b+1) > 0$$

$$a^2 + 2a - 3 > 4b \rightarrow \frac{1}{4}(a+1)^2 - 1$$

$$\therefore b < \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{3}{4}$$

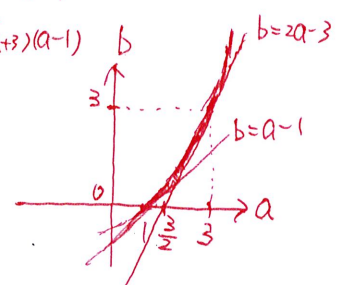
$$(i) f = f(t) \text{ の } t = \frac{a-1}{2} \text{ に } 0 < \frac{a-1}{2} < 1 \rightarrow 1 < a < 3$$

$$(ii) f(0) = -a + b + 1 > 0 \rightarrow b > a - 1$$

$$f(1) = 1 - (a-1) - a + b + 1 > 0 \rightarrow -2a + b + 3 > 0$$

$$\therefore b > 2a - 3$$

図を斜線部、
境界含み。



方程式・不等式・最大最小

[第3問]

実数 a が $-1 \leq a \leq 1$ の範囲を動くとき、直線 $y = 2ax - a^2$ の $a-1 \leq x \leq a+1$ の部分が通過する範囲を図示し、その面積を求めよ。

(199 東大)

x の動き得る範囲は $-2 \leq x \leq 2$ である。

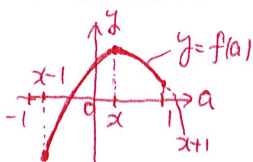
$$y = 2ax - a^2 = f(a) \text{ とする。} (f(a) = -(a-x)^2 + x^2)$$

ここで、 $-1 \leq a \leq 1$ である。

$$a-1 \leq x \leq a+1 \Leftrightarrow x-1 \leq a \leq x+1 \quad \text{②}$$

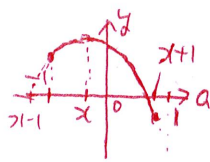
したがって、 x を固定したとき a の範囲に於ける $f(a)$ の値の範囲を調べる。

(i) $0 \leq x \leq 1$ のとき



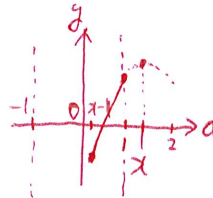
$$f(x-1) \leq f(a) \leq f(x+1) \text{ より } x^2-1 \leq y \leq x^2$$

(ii) $-1 \leq x \leq 0$ のとき



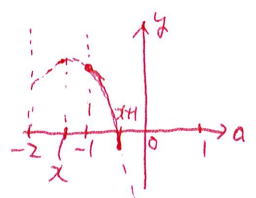
$$f(x+1) \leq f(a) \leq f(x-1) \text{ より } x^2-1 \leq y \leq x^2$$

(iii) $1 \leq x \leq 2$ のとき



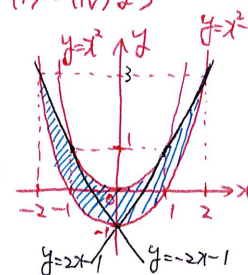
$$f(x-1) \leq f(a) \leq f(1) \text{ より } x^2-1 \leq y \leq 2x-1$$

(iv) $-2 \leq x \leq -1$ のとき



$$f(x+1) \leq f(a) \leq f(-1) \text{ より } x^2-1 \leq y \leq -2x-1$$

(i) ~ (iv) より



$$\begin{aligned} S &= 2 \left[\int_0^1 (x^2 - (x^2 - 1)) dx + \int_1^2 (2x - 1 - (x^2 - 1)) dx \right] \\ &= 2 \left\{ 1 - \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_1^2 \right\} \\ &= 2 \left(1 + \frac{2}{3} \right) = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

[第4問]

関数 $f(x) = \sin x + \sin(x+2\theta)$ について、 θ を $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ で動かしたときの $0 \leq x \leq \pi$

における曲線 $y = f(x)$ の通過範囲を xy 座標平面上に図示せよ。

(198 東大(理))

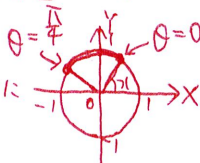
x を固定し $(0 \leq x \leq \pi)$ 、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ にあつて

$$g(\theta) = \sin(2\theta + x) + \sin x$$

の値域を考える。 $0 \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、

$$x \leq 2\theta + x \leq \frac{\pi}{2} + x \text{ である。}$$

(i) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき



$$g(\theta) \leq 1 + \sin x \text{ であり、さらに}$$

(ii) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ のとき

$$g(\theta) \geq g(0) = 2\sin x$$

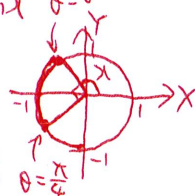
(iii) $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$g(\theta) \geq g(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4} + x) + \sin x = \cos x + \sin x$$

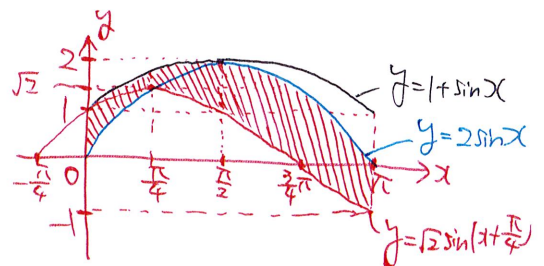
(iv) $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ のとき

$$g(\frac{\pi}{2}) \leq g(\theta) \leq g(0)$$

$$\therefore \cos x + \sin x \leq g(\theta) \leq 2\sin x$$



(i), (ii) を図示すると



求める範囲

まとめると

$$\begin{cases} 2\sin x \leq y \leq 1 + \sin x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}) \\ \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \leq y \leq 1 + \sin x & (\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \\ \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \leq y \leq 2\sin x & (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

方程式・不等式・最大最小

[第5問]

関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + (b-a-1)x$ について次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ が $x \geq 0$ で増加するような点 (a, b) の範囲 G を図示せよ。

(2) $y \geq 0$ における $y = f(x)$ の逆関数を $x = f^{-1}(y)$ ($x \geq 0$) とする。点 (a, b) が G を動くとき、

定積分 $\int_0^b f^{-1}(y) dy$ の最小値を求めよ。

(91 東工大)

$$f(x) = x^3 + ax^2 + (b-a-1)x \text{ について}$$

(1) $x \geq 0$ で $f(x) \geq 0$ とおればよい。

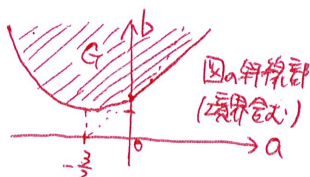
$$f(x) = 3x^2 + 2ax + b - a - 1$$

$$= 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + b - \frac{a^2}{3} - a - 1$$

(i) $a \geq 0$ とき
 $f(0) = b - a - 1 \geq 0$

(ii) $a < 0$ とき
 $f(-\frac{a}{3}) = b - \frac{a^2}{3} - a - 1 \geq 0$

$$\begin{cases} b \geq a+1 & (a \geq 0) \\ b \geq \frac{1}{3}a^2 + a + 1 & (a < 0) \end{cases}$$



(2) $(a, b) \in G$ とき $f(x)$ は $x \geq 0$ で増加関数であり、 $f(0) = 0$, $f(1) = b$ なる。

$$\begin{aligned} \frac{y|0}{x|0} &\rightarrow \frac{b}{1} \\ \int_0^b f^{-1}(y) dy &= \int_0^1 x \times \frac{dy}{dx} dx \\ &= \int_0^1 x(3x^2 + 2ax + b - a - 1) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{a}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{a}{6}$$

$$b = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{3}a^2 + a + 1 \text{ と接するとき: 最小値}$$

$$D=0 \text{ から } \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$$(8) b' = \frac{2}{3}a + 1 = -\frac{1}{3}a \text{ とおす}$$

$$a = -2, b = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{-2}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

[第6問]

実数 a, b に対し、 $f(x) = x^3 + x^2 + (a+b-a^2)x + ab$ とおく。

(1) $f(x)$ を因数分解せよ。

(2) すべての $x \geq 0$ に対し、 $f(x) \geq 0$ が成り立つための a, b の条件を求め、それを満たす (a, b) の存在する範囲を図示せよ。

(00 東工大)

$$(1) f(x) = (x+a)(x^2 - (a-1)x + b)$$

(2) (i) $a \geq 0$ とき $x+a \geq 0$ なる

$$g(x) = x^2 - (a-1)x + b \text{ とおす}$$

$x \geq 0$ とき $g(x) \geq 0$ とおればよい。

$$g(x) = \left(x - \frac{a-1}{2}\right)^2 + b - \frac{(a-1)^2}{4}$$

$$(P) a \geq 1 \text{ とき } b - \frac{(a-1)^2}{4} \geq 0$$

$$(1) 0 \leq a < 1 \text{ とき } b \geq 0 \leftarrow g(0)$$

(ii) $a < 0$ とき

$x+a$ は $x = -a (> 0)$ で符号を

変えてはいるが、 $f(x) \geq 0$ で

おそれるには $g(x)$ が $x = -a$ で

符号を変えてはならない。

$$g(-a) = 0 \text{ が必要}$$

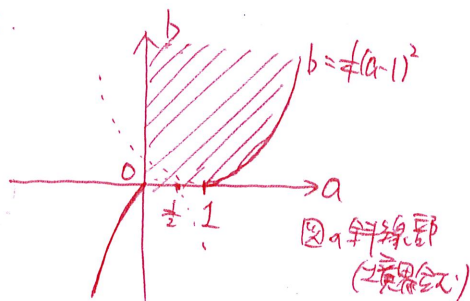
$$\therefore a \leq 2a^2 - a + b = 0 \quad \therefore b = a - 2a^2$$

$$\text{逆に } a < 0 \text{ とき } g(x) = (x+a)(x+1-2a)$$

$$\therefore f(x) = (x+a)^2(x+1-2a) \geq 0 \text{ となる}$$

$$\begin{cases} (i), (ii) \text{ より} \\ a \geq 1 \text{ とき } b \geq \frac{(a-1)^2}{4} \\ 0 \leq a < 1 \text{ とき } b \geq 0 \\ a < 0 \text{ とき } b = -2a^2 + a \end{cases}$$

図示すると



$$y = -x^2 + a \quad (a < 0)$$

高次方程式と複素数

[第7問]

$n=1, 2, 3, \dots$ に対して x の整式

$$P_n(x) = x^3 - nx^2 - (2n+12)x - 8$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 3次方程式 $P_n(x)=0$ の正の実数解はただ1つであることを示せ。

(2) t が $P_n(x)=0$ の解であるとき、 $P_n\left(-\frac{4}{t+2}\right)$ を求めよ。

(3) $P_n(x)=0$ の正の実数解を α_n とするとき、 $P_n(x)=0$ の最小の実数解 β_n を α_n で表せ。

さらに、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ を求めよ。

(06 早大(理))

(1) $P_n(x) = x^3 - nx^2 - (2n+12)x - 8$

$$P'_n(x) = 3x^2 - 2nx - 2n - 12$$

$P_n(x)=0$ の2解を α, β とする ($\alpha < \beta$)

$$P_n(0) = -2n-12 < 0 \text{ であり}$$

$$\alpha < 0 < \beta$$

x	α	-1	0	-1	β	-
$P_n(x)$	+	0	-	-	0	+
$P'_n(x)$	+	+	+	+	+	+

増減表より $f(\beta) < 0$ であり

$x > \beta$ かつ $P_n(x)$ は単調増加である

$\lim_{x \rightarrow \infty} P_n(x) = +\infty$ となる。

(2) t が $P_n(x)=0$ の解であると

$$t^3 - nt^2 - (2n+12)t - 8 = 0 \quad \text{①}$$

よって

$$P_n\left(-\frac{4}{t+2}\right) = \left(-\frac{4}{t+2}\right)^3 - n\left(-\frac{4}{t+2}\right)^2 - (2n+12)\left(-\frac{4}{t+2}\right) - 8$$

$$= \frac{8}{(t+2)^3} \{-8 - 2n(t+2) + (n+6)(t+2)^2 - (t+2)^3\}$$

$$= \frac{-8}{(t+2)^3} \{t^3 + 6t^2 + 12t + 8 - (n+6)(t^2 + 4t + 4) + 2nt + 4n + 8\}$$

$$= \frac{-8}{(t+2)^3} \{t^3 - nt^2 - (2n+12)t - 8\} = 0 \quad \text{(①より)}$$

(3) (2)により $\alpha_n (> 0)$ が $P_n(1) = 0$ であり $-\frac{4}{\alpha_n+2} < 0$ である。また、この解を β_n とすると解と係数の関係より

$$\alpha_n + \beta_n + \left(-\frac{4}{\alpha_n+2}\right) = 0$$

$$\therefore \beta_n = -\frac{2(\alpha_n+2)}{\alpha_n} = -2 - \frac{4}{\alpha_n} (< 0)$$

$$\therefore \beta_n < -2 < -\frac{4}{\alpha_n+2} \quad (\because \alpha_n > 0)$$

$$\therefore \beta_n = \alpha_n = -2 - \frac{4}{\alpha_n}$$

また、(1) α の正の解は、

$$P_n(n) = -n(2n+12) < 0$$

より $\alpha_n > n$ であり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = -2$$

(? 早大(理))

[第8問]

実数 a, b は、 $a \geq 1, b \geq 1$ を満たすとする。このとき、次の2つの方程式

$$ax^2 + (a+1)x + (a+2) = 0 \quad \dots \text{①}$$

$$bx^3 + (b+1)x^2 + (b+2)x + (b+3) = 0 \quad \dots \text{②}$$

は共通解をもたないことを示せ。

①と②が共通解 α をもつとすると

$$\begin{cases} a\alpha^2 + (a+1)\alpha + (a+2) = 0 \quad \dots \text{①}' \\ b\alpha^3 + (b+1)\alpha^2 + (b+2)\alpha + (b+3) = 0 \quad \dots \text{②}' \end{cases}$$

$$\text{①}' \times b\alpha - \text{②}' \times a \text{ より}$$

$$(b-a)\alpha^2 + 2(b-a)\alpha - a(b+3) = 0 \quad \dots \text{③}$$

$$\therefore \text{ここで、} \alpha = b \text{ とすると } -a(b+3) = 0$$

$$a \geq 1 \text{ より } b = -3 \text{ となるが、} b \geq 1 \text{ に反する。}$$

よって $\alpha \neq b$ とすると ③は

$$\alpha^2 + 2\alpha + \frac{a(b+3)}{a-b} = 0 \quad \dots \text{③}'$$

$$\star \text{ - ③, ① は } D = (a+1)^2 - 4a(a+2)$$

$$= -3(a+1)^2 + 4 < 0 \quad (\because a \geq 1) \text{ により}$$

①' と ③' は 同じ2つの解をもつことになる。
(重複複素数)

係数を $\frac{a+1}{a} = 2$

$$\begin{cases} \frac{a+1}{a} = 2 \\ \frac{a+2}{a} = \frac{a(b+3)}{a-b} \end{cases}$$

これを解くと $a=1, b>0$ となり $b \geq 1$ に反する。

よって ①と②は共通解をもたない。

高次方程式と複素数

[第9問]

n を3以上の自然数とすると、次を示せ。

ただし、 $\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ とし、 i を虚数単位とする。

(1) $\alpha^k + \bar{\alpha}^k = 2\cos \frac{2\pi k}{n}$ ただし、 k は自然数とし、 $\bar{\alpha}$ は α に共役な複素数とする。

(2) $n = (1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1})$ ← (1-1)だね!

(3) $\frac{n}{2^{n-1}} = \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{n-1}{n}\pi$ ← $1-\alpha^k = 2\sin \frac{k\pi}{n}$ にしたい!

(1) 1. "モアウラ定理より、

$$\alpha^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

$$\therefore \bar{\alpha}^k = \overline{\alpha^k} = \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

$$\alpha^k + \bar{\alpha}^k = 2\cos \frac{2k\pi}{n}$$

(2) α^k ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$) に于いて、

$$(\alpha^k)^n = (\alpha^n)^k = (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)^k = 1$$

から、 α^k は 1 の n 乗根であり、

すべて互いに異なる。

$$\therefore x^n = 1 \Leftrightarrow x^n - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = 0$$

$$k=0 \text{ のとき } \alpha^k = 1 \text{ より}$$

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0 \text{ の}$$

解は α^k ($k=1, 2, 3, \dots, n-1$) である、

したがって、

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = (x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^{n-1})$$

x に 1 を代入すれば、

$$n = (1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1})$$

$$\begin{aligned} 1-\alpha^k &= 1 - \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n} \\ &= 2\sin^2 \frac{k\pi}{n} - 2i \sin \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n} \\ &= 2\sin \frac{k\pi}{n} (\sin \frac{k\pi}{n} - i \cos \frac{k\pi}{n}) \end{aligned}$$

×
て

ふたつ-! じゃあ倍角がある!

(02 北大)

1.5 JTEG

(3) (上段でも考えたように、(1)を使え!)

$$|1-\alpha^k|^2 = (1-\alpha^k)(1-\bar{\alpha}^k)$$

$$= 1 - (\alpha^k + \bar{\alpha}^k) + |\alpha^k|^2$$

$$= 2(1 - \cos \frac{2k\pi}{n}) \text{ (1)より)}$$

$$= 4\sin^2 \frac{k\pi}{n}$$

$$\therefore |1-\alpha^k| = 2\sin \frac{k\pi}{n}$$

したがって、(2)より、

$$\begin{aligned} n &= |1-\alpha||1-\alpha^2|\cdots|1-\alpha^{n-1}| \\ &= 2\sin \frac{\pi}{n} \cdot 2\sin \frac{2\pi}{n} \cdots 2\sin \frac{(n-1)\pi}{n} \\ &= 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \end{aligned}$$

[第10問]

次の連立方程式 (※) を考える。

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ z = 2y^2 - 1 \\ x = 2z^2 - 1 \end{cases} \quad (\text{※})$$

(1) $(x, y, z) = (a, b, c)$ が (※) の実数解であるとき、 $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$, $|c| \leq 1$ であることを示せ。

(2) (※) は全部で8個の相異なる実数解をもつことを示せ。

(1) $(x, y, z) = (a, b, c)$ が (※) の実数解であるとき、

背理法

$$b = 2a^2 - 1 \cdots ①$$

$$c = 2b^2 - 1 \cdots ②$$

$$a = 2c^2 - 1 \cdots ③$$

$|a| \leq 1$ と仮定して $b > 1$ 、②より $c > 1$ となる。

③より $a > 1$ と矛盾。

$$a-1 = 2c^2 - 2 \text{ (③より)}$$

$$= 2(c+1)(c-1)$$

$$= 2(c+1)(2b^2-2) \text{ (②より)}$$

$$= 4(c+1)(b+1)(b-1)$$

$$= 4(c+1)(b+1)(2a^2-2)$$

$$= 8(c+1)(b+1)(a+1)(a-1)$$

$$a > 1 \text{ のとき } 8(c+1)(b+1)(a+1) = 1$$

と得るが、 $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$ のとき

これは不成立。

よって $|a| \leq 1$ 対称性から同様に $|b| \leq 1$, $|c| \leq 1$ となる。

(197 京大 (理系))

(2) (1)より $x = \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とおいて、

$$y = \cos 2\theta, z = \cos 4\theta, x = \cos 8\theta$$

$$\therefore \cos 8\theta = \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow 8\theta = \pm \theta + 2n\pi \text{ (n: 整数)}$$

$$\therefore \theta = \frac{2n\pi}{7}, \theta = \frac{9n\pi}{7}$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ ならば $\theta = 0, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}, \frac{12\pi}{7}$
 $\cos \theta$ は $0 \leq \theta \leq \pi$ で単調減少だから、これら8個
 に于いて $\cos \theta$ の値はすべて異なる。 x が異なるため、 y, z も

[第11問]

3辺の長さが1, 1, a である三角形の面積を, 周上の2点を結ぶ線分で2等分する。

それらの線分の長さの最小値を a を用いて表せ。

(99 東工大)

三角形の成立条件から, $0 < a < 2$

このもとで, $AB = AC = 1$, $BC = a$ とする。

(i) P, Q が $\triangle ABC$ の AB, AC 上にありとせ

$AP = x$ ($0 < x < 1$), $AQ = y$ ($0 < y < 1$) とおくと

面積について, $\triangle APQ = \frac{1}{2} \triangle ABC$ より $xy = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} PQ^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos A \\ &= x^2 + y^2 - \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{2} \quad \left(\cos A = \frac{2-a^2}{2} \right) \\ &= x^2 + y^2 - \frac{1-a^2}{2} \\ &\geq 2\sqrt{x^2 y^2} - \frac{1-a^2}{2} \quad (\text{相加}) \\ &= \frac{a^2}{2} \quad (\text{等号は } x=y=\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

PQ の最小値は $\frac{a}{\sqrt{2}}$

(ii) P, Q が $\triangle ABC$ の AB, BC 上にありとせ

$BP = x$ ($0 < x < 1$), $BQ = y$ ($0 < y < a$) とおくと

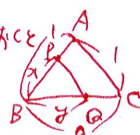
面積について, $\triangle BPQ = \frac{1}{2} \triangle ABC$ より

$$xy = \frac{a}{2}$$

$$\begin{aligned} PQ^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos B \\ &= x^2 + y^2 - \frac{a^2}{2} \quad \left(\cos B = \frac{1-a^2}{2} \right) \\ &\geq 2\sqrt{x^2 y^2} - \frac{a^2}{2} \quad (\text{相加}) \\ &= a - \frac{a^2}{2} \quad (\text{等号は } x=y=\sqrt{\frac{a}{2}}) \end{aligned}$$

PQ の最小値は $\sqrt{a - \frac{a^2}{2}}$

(ただし, $0 < x < 1$, $0 < y < a$ より $\sqrt{\frac{a}{2}} < a$
 $\frac{a(1-a)}{2} > 0$ から $\frac{1}{2} < a < 2$.)



(i), (ii) より,

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a - \frac{a^2}{2}} \quad (0 < a < 2) \quad \left(\frac{1}{2} < a < 2 \right)$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(a - \frac{a^2}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{2} - \left(a - \frac{a^2}{2} \right)^2 = a(a-1)$$

したがって

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \text{ とき } \frac{a}{\sqrt{2}} \\ 1 \leq a < 2 \text{ とき } \sqrt{a - \frac{a^2}{2}} \end{cases}$$

[第12問]

$\triangle ABC$ において, 辺 AB の中点 M , 辺 AC の中点 N とする。

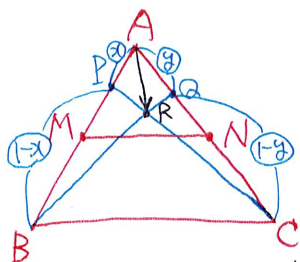
辺 AB を $x : (1-x)$ ($0 \leq x < 1$) の比に内分する点 P と, 辺 AC を $y : (1-y)$ ($0 \leq y < 1$) の比に

内分する点 Q をとり, 線分 BQ と線分 CP の交点を R とする。

このとき, R が $\triangle AMN$ に含まれるような (x, y) 全体を xy 平面に図示せよ。

(ただし, 辺 AB , 辺 AC を $0 : 1$ の比に内分する点とは, とともに点 A のこととする)

(03 東工大)



$$\vec{AR} = x(1-t)\vec{AB} + t\vec{AC}$$

$$\vec{AR} = (1-s)\vec{AB} + s\vec{AC}$$

$\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ は一次独立であるから

$$\begin{cases} x(1-t) = 1-s \\ t = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = s \\ x(1-s) = 1-s \end{cases}$$

$$\therefore s = \frac{1-x}{1-xy}, t = \frac{y(1-x)}{1-xy}$$

$$\text{したがって } \vec{AR} = \frac{x(1-y)}{1-xy}\vec{AB} + \frac{y(1-x)}{1-xy}\vec{AC}$$

$$= \frac{2x(1-y)}{1-xy}\vec{AM} + \frac{2y(1-x)}{1-xy}\vec{AN}$$

点 R が $\triangle AMN$ に含まれるのは,

$$0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \text{ より}$$

$$\frac{2x(1-y)}{1-xy} + \frac{2y(1-x)}{1-xy} \leq 1$$

$$(\text{周上も含まれる})$$

$$\therefore 2x(1-y) + 2y(1-x) \leq 1-xy$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y - 3xy \leq 1$$

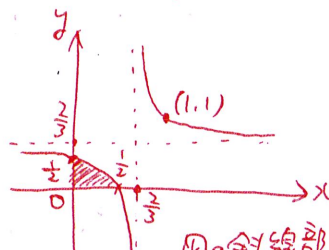
$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 2y \leq -1$$

$$\Leftrightarrow 3x\left(y - \frac{2}{3}\right) - 2\left(y - \frac{2}{3}\right) \geq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(y - \frac{2}{3}\right) \geq \frac{1}{9}$$

$$\text{よって } \begin{cases} 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(y - \frac{2}{3}\right) \geq \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(y - \frac{2}{3}\right) \geq \frac{1}{9}$$



図の斜線部。
境界含む。

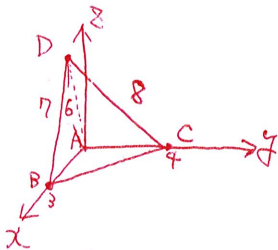
平面図形と空間図形 総合

[第13問]

AB=3, AC=4, BC=5, AD=6, BD=7, CD=8 である。

四面体ABCDの体積を求めよ。

(03 京大(文系))



$3^2+4^2=5^2$ より、 $\triangle ABC$ は直角三角形。

座標空間において、 $A(0,0,0)$,
 $B(3,0,0)$, $C(0,4,0)$ とし、 $D(x,y,z)$ とする。
($z>0$)

$$\begin{cases} AB=6, BD=7, CD=8 \text{ より} \\ x^2+y^2+z^2=36 \quad \cdots \textcircled{1} \\ (x-3)^2+y^2+z^2=49 \quad \cdots \textcircled{2} \\ x^2+(y-4)^2+z^2=64 \quad \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

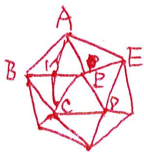
$$\begin{aligned} \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } -6x+9 &= 13 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \\ \textcircled{1}, \textcircled{3} \text{ より } -8y+16 &= 28 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \\ \textcircled{1} \text{ に代入して } z^2 &= \frac{1199}{36} \\ z > 0 \text{ より } z &= \frac{\sqrt{1199}}{6} \\ \text{よって求める体積は} \\ \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4 \right) \times \frac{\sqrt{1199}}{6} &= \frac{\sqrt{1199}}{3} // \end{aligned}$$

[第14問]

正二十面体は 20 個の正三角形のそれぞれの辺をつなぎ合わせて得られる多面体であり、各頂点の周りには 5 つの正三角形が集まっている。

この隣り合う 2 面のなす角を θ としたとき、 $\cos \theta$ の値はいくらか。

(99 横国大)



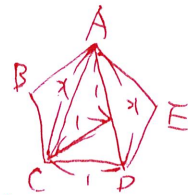
図のように P, A, B, C, D を定めると。

ABCDE は正五角形であり、辺の長さを 1 とし、
 $\cos \theta$ の値に影響はない。

BR の中点を M とすると二等辺三角形 MAC について、
 $\angle AMC = \theta$ である。ここで $AM = MC = \frac{\sqrt{5}}{2}$ である。

(中略) $AC = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ として余弦定理を用いて

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{5}^2 + \sqrt{5}^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2}{2 \times \sqrt{5}^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3} //$$



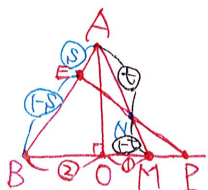
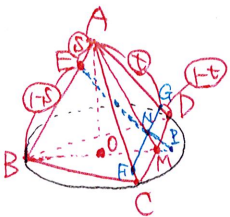
$$\begin{cases} x+1=1+(x-1) \\ x^2-x-1=0 \text{ より} \\ AC=x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

[第15問]

正四面体の 4 つの頂点を A, B, C, D とする。 s, t を $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ を満たす実数とし、線分 AB を $s : (1-s)$ に内分する点を E, 線分 AC を $t : (1-t)$ に内分する点を F, 線分 AD を $t : (1-t)$ に内分する点を G とおく。

3 点 E, F, G を通る平面が、3 点 B, C, D を通る円と共有点をもつために、 s, t の満たすべき条件を求め、点 (s, t) の範囲を平面上に図示せよ。

(99 京大(理系))



CF, FG の中点をそれぞれ M, N とする。

FG // CD である。

$$AN : NM = AG : GD = t : (1-t)$$

である。ここで、 $\triangle ABM$ を含む平面に於て、

直線 EN と直線 BM の交点を P とする。

$\triangle BCD$ は正三角形である。その外心を O とすると、O は重心でもあるから、 $BO : OM = 2 : 1$ である。

よって題意の条件は

$$OP \leq OB \Leftrightarrow OM + MP \leq 2OM$$

$$\Leftrightarrow MP \leq OM \quad \cdots \textcircled{1}$$

をみたすことである。

ここで、 $\triangle ABM$ と $\triangle EFP$ においてメネラウスの定理より、

$$\frac{AE}{EB} \times \frac{BP}{PM} \times \frac{MN}{NA} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{s}{1-s} \times \frac{BP}{PM} \times \frac{1-t}{t} = 1$$

$$\therefore \frac{BP}{PM} = \frac{t(1-s)}{s(1-t)} \text{ より}$$

$$\frac{3OM + MP}{PM} = 3 \cdot \frac{OM}{PM} + 1 = \frac{t(1-s)}{s(1-t)}$$

$$\therefore 3 \cdot \frac{OM}{PM} = \frac{t(1-s) - s(1-t)}{s(1-t)}$$

$$\frac{OM}{PM} = \frac{t-s}{3s(1-t)} \geq 1 \quad (\text{曲線の境界は含む})$$

$$0 < s < 1, 0 < t < 1 \text{ かつ}$$

$$t \geq \frac{s}{3s+1}$$



平面図形と空間図形 総合

[第16問]

平面上に点Oを中心とする半径1の円Cがある。また、この平面上のOと異なる点Aを
通って直線OAと垂直な空間直線lがあり、平面とのなす角が45°である。このとき、円C
と直線lの間の最短距離を、2点O, A間の距離aで表せ。

(03 軌理)

OA方向をx軸にとり、O(0,0,0), A(a,0,0)とすれば、

lの方向ベクトルを(0,1,1)として、任意な点をみだす図形
を表現する。

l上の点は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}$ (t:実数)と表せ。

C上の点は $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$)と表せば、

この2点間の距離をdとすると、

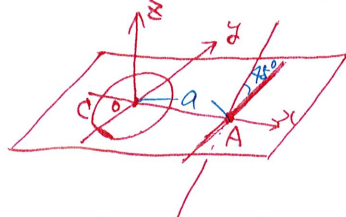
$$d^2 = (a - \cos \theta)^2 + (t - \sin \theta)^2 + (t - 0)^2$$

$$= 2t^2 - 2t \sin \theta + a^2 - 2a \cos \theta + 1$$

ここでθも固定してtのみを動かすと、

$$d^2 = 2\left(t - \frac{\sin \theta}{2}\right)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{2} + a^2 - 2a \cos \theta + 1$$

t = $\frac{\sin \theta}{2}$ のとき、最小値 $m(\theta) = -\frac{1}{2} \sin^2 \theta + a^2 - 2a \cos \theta + 1$



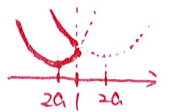
cos θ = X とて、(-1 ≤ X ≤ 1)

$$m(\theta) = -\frac{1}{2}(1-X^2) - 2aX + a^2 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(X-2a)^2 - a^2 + \frac{1}{2}$$

a > 0 のとき、 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ のとき $\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}}$

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1$$



(別解) 先にtを固定すると

$$d^2 = -2\sqrt{t^2 + a^2} \sin(\theta + \alpha) + 2t^2 + a^2 + 1$$

$$\geq -2\sqrt{t^2 + a^2} + 2(t^2 + a^2) - a^2 + 1$$

$$= -2X + 2X^2 - a^2 + 1$$

ここで $\sqrt{a^2 + t^2} = X$ とおくと ($X \geq a$)

$$\frac{1}{2} a \leq X \leq \frac{1}{2}$$

$$X = 2\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - a^2 + \frac{1}{2}$$

→ $a \geq \frac{1}{2}$ のとき $|a-1|$

→ $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき $\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}}$

[第17問]

a が与えられた実数のとき、xyz空間の点C(a, 0, 3)から出た光が球

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$$

でさえぎられてできるxy平面上の影をSとすると、Sの領域を図示せよ。

(09 東工大)

Sの領域内の点をP(x, y, 0)と表すと

直線CP上の点Q(x, y, z)は、

$$\begin{cases} x = a + t(x-a) \\ y = 0 + t y \\ z = 3 + t(0-3) \end{cases} \quad (t: \text{実数}) \quad \text{--- ①}$$

と表せる。--- ②. 球面の方程式は

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \quad \text{--- ②}$$

①と②が共有点をもつようなx, y, aの条件を求めればよい。

①を②に代入

$$\{a + t(x-a)\}^2 + \{t y\}^2 + \{3 - 3t\}^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \{(x-a)^2 + y^2 + 9\}t^2 + 2\{a(x-a) - 6\}t + a^2 + 3 = 0 \quad \text{--- ③}$$

ここで $(x-a)^2 + y^2 + 9 > 0$ より ③はtの2次方程式であり、

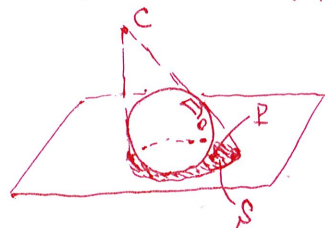
実数tが存在すれば共有点をもつことになるが、

③の判別式をDとすると

$$D/4 = \{a(x-a) - 6\}^2 - \{(x-a)^2 + y^2 + 9\}(a^2 + 3) \geq 0$$

$$\therefore -(2a(x-a) - 3(x-a)^2 + 36 - (y^2 + 9)(a^2 + 3)) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 - 6ax + 9a^2 + 36 - (a^2 + 3)y^2 - 9(a^2 + 3) \geq 0$$



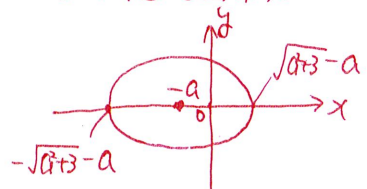
$$\Leftrightarrow -3x^2 - 6ax - (a^2 + 3)y^2 + 9 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6ax + (a^2 + 3)y^2 \leq 9$$

$$\Leftrightarrow 3(x+a)^2 + (a^2 + 3)y^2 \leq 3a^2 + 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+a)^2}{a^2 + 3} + \frac{y^2}{3} \leq 1$$

これをx-y平面に図示すると



整数と数列・漸化式

[第18問]

3以上9999以下の奇数 a で、 $a^2 - a$ が10000で割り切れるものをすべて求めよ。

(05 東大(文理))

$$a^2 - a = 10000n \quad (n: \text{自然数}) \text{ とおくと}$$

$$a(a-1) = 2^4 \cdot 5^4 n$$

ここで、 $a-1$ と a は連続する整数で、
かつ a は奇数だから、

$a-1$ は 2^4 の倍数である。また、

$a-1$ と a の一方が 5^4 の倍数となるが、

$a-1$ が 5^4 の倍数とすると、 $a-1$ は、

$$2^4 \times 5^4 = 10000 \text{ の倍数}$$

となり、 $3 \leq a \leq 9999$ に反する。したがって、

$$a = 5^4 l, \quad a-1 = 2^4 m \quad (l, m: \text{自然数})$$

とおく。これより a を消去し

$$5^4 l - 2^4 m = 1$$

$$\rightarrow \text{つまり、} 625l - 16m = 1$$

$$\rightarrow 625l - 16 \times 39 = 1$$

$$625(l-1) = 16(m-39)$$

$$\begin{cases} l-1 = 16k \\ m-39 = 625k \end{cases} \quad (k: \text{整数})$$

$$\text{このとき } a = 625l$$

$$= 625(16k+1)$$

$$= 10000k + 625$$

$3 \leq a \leq 9999$ をみたすのは、 $k=0$ のときのみで、

$$a = 625 //$$

[第19問]

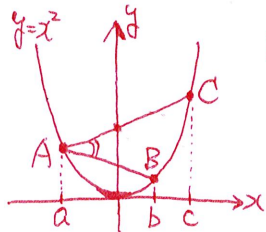
a, b, c は整数で、 $a < b < c$ を満たす。

放物線 $y = x^2$ 上に3点 $A(a, a^2), B(b, b^2), C(c, c^2)$ をとる。

(1) $\angle BAC = 60^\circ$ とはならないことを示せ。ただし、 $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明なしに用いてよい。

(2) $a = -3$ のとき、 $\angle BAC = 45^\circ$ となる組 (b, c) をすべて求めよ。

(69 一橋大)



(1) 直線 AB, AC と x 軸正方向との

なす角をそれぞれ α, β とする。

$$(-90^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ)$$

$$\text{ここで } AB \text{ の傾きは } \frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b = \tan \alpha$$

$$\text{同様に } AC \text{ の傾きは } a + c = \tan \beta$$

$$a < b < c \text{ より } \tan \alpha < \tan \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$$

したがって $\angle BAC = \theta$ とすると

$$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha)$$

$$= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{c - b}{1 + (a+b)(a+c)} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\theta = 60^\circ$ とすると、 θ の値は $\sqrt{3}$

a, b, c は整数だから θ の値は

有理数であることが矛盾する。

(したがって、 $\theta = \angle BAC = 60^\circ$ とはならない。)

(2) $a = -3, \theta = 45^\circ$ とすると $\textcircled{1}$ は

$$\frac{c - b}{1 + (b-3)(c-3)} = 1$$

$$\therefore c - b = 1 + (b-3)(c-3)$$

$$\Leftrightarrow bc - 2b - 4c + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow b(c-2) - 4(c-2) - 8 + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-4)(c-2) = -2$$

$$-3 < b < c \text{ を考慮して } \boxed{c-2 > 0}$$

$$(b-4, c-2) = (-2, 1), (-1, 2)$$

$$(b, c) = (2, 3), (3, 4) //$$

整数と数列・漸化式

[第20問]

4つの正多角形を1点の周りに重なりもせず、すきまもなく並べて敷きつめるには、どのような正多角形を用いたらよいか。すべての場合をあげよ。

(有名問題)

正多角形の1つの内角の大きさは、

$$\frac{180 \times (n-2)}{n} = 180 - \frac{360}{n} \text{ である。}$$

いま、4つの正多角形の内角の数を

$$n_1, n_2, n_3, n_4 \quad (n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4)$$

とすると題意は

$$\sum_{i=1}^4 (180 - \frac{360}{n_i}) = 360$$

が成り立つこと。

$$\sum_{i=1}^4 (1 - \frac{2}{n_i}) = 2$$

$$\therefore 4 - (\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \frac{2}{n_3} + \frac{2}{n_4}) = 2$$

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1$$

おたためて $n_i (i=1,2,3,4)$ を $1, 2, 3, 4$ とし

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1 \quad (3 \leq p \leq q \leq r \leq s) \quad \cdots \textcircled{1}$$

この自然数解の組数を求める。

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \leq \frac{4}{p} \text{ 故に } p \leq 4 \text{ 候補は } 3 \text{ と } 4$$

(i) $p=3$ のとき

$$\textcircled{1} \text{ は } \frac{1}{3} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{2}{3} \leq \frac{3}{q} \text{ 故に } q \leq \frac{9}{2}$$

$$(p) q=3 \text{ のとき } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq \frac{2}{r} \text{ 故に } r \leq 6$$

$$(n,s) = (4,12), (6,6)$$

(ii) $p=4$ のとき

$$\textcircled{1} \text{ は } \frac{1}{4} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{3}{4} \leq \frac{3}{q} \text{ 故に } q \leq 4$$

$$q=4$$

$$(r,s) = (4,4)$$

$$\therefore (p,q,r,s) = (4,4,4,4)$$

[第21問]

10進法表示の n 桁の正の整数で、隣り合う桁の数字が互いに相異なるような数の個数を a_n とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 $n \geq 2$ とする。

(1) a_n を求めよ。

(2) 上の数のうちで、1の位の数字が0である数の個数を b_n とするとき、 b_n を求めよ。

$$= \begin{pmatrix} 3,3,4,12 \\ 3,3,6,6 \\ 3,4,4,6 \\ 4,4,4,4 \end{pmatrix} \quad (91 \text{ 東工大})$$

(1) 最高位の桁は0以外の9通り、 $(10^{n-1}$ 位)

それ以降の $(n-1)$ 桁はそれぞれ隣り合う桁が異なるので、

$$10^{n-2} \sim 10^0 \text{ 位}$$

$$a_n = 9^n$$

(2) a_n のうち、1の位が0であるものは、

$10^{n-1} \sim 10^0$ 位までの $(n-1)$ 桁の隣り合う数字が異なる整数のうち、

末尾(10の位)が0でないものだけ

$$\begin{matrix} 10^{n-1} & 10^{n-2} & & 10^1 & 10^0 \text{ 位} \\ \square & \square & \cdots & \square & \square \\ & & & \uparrow & \\ & & & \text{2桁分} & \end{matrix}$$

$$a_{n-1} - b_{n-1} \text{ (10)}$$

2桁以上で
考えよう

$$b_n = a_{n-1} - b_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

$$n \geq 3 \text{ のとき } b_n = 9^{n-1} - b_{n-1}$$

$$n \geq 2 \text{ のとき } b_{n+1} = -b_n + 9^n$$

$$\frac{b_{n+1}}{9^{n+1}} = -\frac{1}{9} \times \frac{b_n}{9^n} + \frac{1}{9}$$

$$\frac{b_{n+1}}{9^{n+1}} - \frac{1}{10} = -\frac{1}{9} \left(\frac{b_n}{9^n} - \frac{1}{10} \right)$$

$$\frac{b_n}{9^n} - \frac{1}{10} = \left(\frac{b_{n-1}}{9^{n-1}} - \frac{1}{10} \right) \times \left(-\frac{1}{9} \right)^{n-2}$$

$$= \left(\frac{9}{9^1} - \frac{1}{10} \right) \times \left(-\frac{1}{9} \right)^{n-2}$$

$$= \frac{1}{90} \left(-\frac{1}{9} \right)^{n-2}$$

$$= -\frac{1}{90} \left(-\frac{1}{9} \right)^{n-1}$$

$$\frac{b_n}{9^n} = \frac{1}{10} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{9} \right)^{n-1} \right\}$$

$$b_n = \frac{1}{10} \{ 9^n - 9(-1)^{n-1} \} = \frac{1}{10} \{ 9^n + 9(-1)^n \} \quad (n \geq 2)$$

整数と数列・漸化式

[第22問]

座標平面上で、 $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n, \dots$ はすべて円であり、次の条件を満たしている。

- ている。
-
- The diagram shows a vertical ellipse centered at O_m on the y -axis. Inside the ellipse, there are two circles. The upper circle has center P_m and radius r_m . The lower circle has center P_n and radius r_n . The x -axis is horizontal and the y -axis is vertical.

このとき，円 O_n の直径，およびその中心の y 座標 p_n を求め， n の式で表せ。

(04 早教(教育))

① 仮定: $0 \leq n \leq n_{t+1}$ の「外接可能条件」は

$$P_{n+1} - P_n = r_{n+1} + r_n$$
 ② を代入して

$$r_{n+1}^2 + \frac{1}{4} - (r_n^2 + \frac{1}{4}) = r_{n+1} + r_n$$

$$r_{n+1} > 0 \text{ の } \therefore r_{n+1} - r_n = 1 \quad (r_n = \frac{1}{2})$$

$$r_n = \frac{1}{2} + (n-1) \cdot 1 \quad \left\{ \begin{aligned} P_n &= (n - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \\ &= n^2 - n + \frac{1}{4} \end{aligned} \right.$$

$$\therefore 2r_n = 2n - 1$$

[第23問]

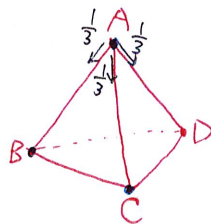
1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD の边上を、いくつかの粒子が次の規則に従って毎秒 1 の速さで運動している。

規則 1 : 各粒子は辺の途中で向きを変えることなく、ある頂点を出発した粒子はちょうど 1 秒後に別の頂点に達する。

規則 2 : 各粒子は頂点に達すると, その頂点を端点とする 3 辺のいずれかに,

それぞれ確率 $\frac{1}{3}$ で進む。

規則 3 : 粒子どうしは辺の途中で正面衝突しても互いにすり抜けてそのまま進むが、同一頂点に 2 個以上の粒子が同時に達すると、それらは瞬時に合体し、以後は 1 個の粒子として運動する。



今、ちょうど3個の粒子が存在し、それぞれ頂点A、B、Cに同時に達したところである。

($n+0.1$)秒後にちょうど k 個の粒子が存在する確率を $P_k(n)$ とするとき、以下の問いに答えよ。ただし n は自然数とする。

$$P_3(1) = 1 - \frac{1}{27} - \frac{5}{9} = \frac{11}{27}$$

- (1) $P_1(1)$, $P_2(1)$, $P_3(1)$ を求めよ。 $\rightarrow P_1(1)$ は1秒後に2コ, $P_2(1)$ は2秒後に2コ, $P_3(1)$ は3秒後に2コ
(2) ちょうど n 秒後に粒子が3個から2個になる確率 $Q(n)$ を求めよ。
(3) $P_2(n)$, $P_1(n)$ を求めよ。 $\leftarrow P_2(n)$: $(n-1)$ 秒後に2コ, $P_1(n)$: $(n-2)$ 秒後に2コ

(98東京医科歯科大)

(2) $(n-1)$ 秒後まで「はず」と3個で、 n 秒後に2個になる。

$$\therefore Q(n) = \left(\frac{11}{27}\right)^{n-1} \times \frac{5}{9}$$

(3) $B(n) \leq 7n$.

3つの箱子が $(i-1)$ 秒後まで3つのまま、 i 秒後に2コになり、残り1の $(n-i)$ 秒は2コのまま。である確率は

$$\begin{aligned} \left(\frac{11}{27}\right)^{\cancel{0}^1} \times \frac{5}{9} \times \left(\frac{7}{9}\right)^{\cancel{0}^1} &= \frac{5}{9} \times \left(\frac{11}{27}\right)^1 \times \left(\frac{7}{9}\right)^1 \times \left(\frac{9}{9}\right)^{\cancel{0}^1} \times \frac{27}{11} \\ &= \frac{15}{11} \times \left(\frac{11}{27}\right)^1 \times \left(\frac{7}{9}\right)^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow = \frac{5}{7} \times \left(\frac{7}{9}\right)^n \times \frac{2}{10} \times \left\{1 - \left(\frac{11}{27}\right)^n\right\} \\ &= \frac{3}{2} \left\{\left(\frac{7}{9}\right)^n - \left(\frac{11}{27}\right)^n\right\} // \end{aligned}$$

$$P_1(n) = 1 - \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{7}{9}\right)^n - \left(\frac{11}{27}\right)^n \right\} - \left(\frac{11}{27}\right)^n$$

$$= 1 - \frac{3}{2} \times \left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{11}{27}\right)^n //$$

$$B(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \times \frac{1}{2^i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

集合論理と確率

[第24問]

集合 $T = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ について, α, β, γ は相異なる 0 でない複素数であり, そのうちの 2 個の積も (同じ数どうしの積も含める) もとの 3 つの複素数のうちのどれかであるという。

(1) $S = \{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\}$ とおくと, 集合 S の要素の個数は 3 個以下であることを証明せよ。

(2) 集合 $T = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ を決定せよ。

(99 北見工大)

(1) 解法. $\alpha \in T, \alpha^2 \in T$ であるから, $\alpha^3 \alpha^2 \in T$

同様に $\alpha^4 = \alpha^3 \times \alpha \in T$ であるから,

S の要素はすべて T に属する. $\therefore S \subset T$

したがって $n(S) \leq n(T) = 3$ が成り立つ。

(2) (1) より $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ の中には等しいものが存在する。

$\alpha = \alpha^2$ とすると $\alpha \neq 0$ より $\alpha = 1$

同様に $\alpha = \alpha^3, \alpha = \alpha^4, \alpha^2 = \alpha^3, \alpha^2 = \alpha^4, \alpha^3 = \alpha^4$ とすれば,

11 題に $\alpha^2 = 1, \alpha^3 = 1, \alpha = 1, \alpha^2 = 1, \alpha = 1$

したがって $\alpha = 1$ または $\alpha^2 = 1$ または $\alpha^3 = 1$

よって α のとり得る値は $\alpha = 1, -1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$... ①

← $S \subset T$ を示す。

→ 41 の議論を α と β 互いに代えて
同じで「あるから」, α, β, γ は

のいずれかが異なった値である。

ここで $w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とおくと

$w^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, w^3 = 1$

とあるから条件を満たす α の値は

$\{1, w, w^2\}$ である

$\therefore T = \{1, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\}$

[第25問]

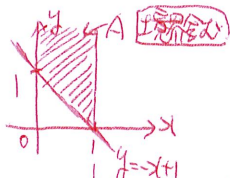
xy 平面において, 集合 $A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x + y \geq 1\}$ および 0 でない実数 a, b によ

って定められる集合 $B = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \leq \frac{1}{ab}\}$ を考える。 $A \cap B$ が空集合になるた

めの a, b の条件を求め, この条件を満たす点 (a, b) の存在範囲を図示せよ。

(99 奈良女子大)

まず A は $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y \geq -x + 1\}$

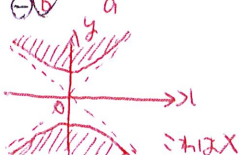


次に B は $\{(x, y) \mid \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \leq \frac{1}{ab}\}$

(i) $a > 0$ かつ $b > 0$ のとき (ii) $a < 0$ かつ $b < 0$ のとき

$$\frac{x^2}{\frac{1}{b}} + \frac{y^2}{\frac{1}{a}} \leq 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{b}} + \frac{y^2}{\frac{1}{a}} \geq 1$$



(iii) $a < 0$ かつ $b > 0$ のとき

$$\frac{x^2}{\frac{1}{b}} + \frac{y^2}{\frac{1}{a}} \leq 1$$



(iv) $a < 0$ かつ $b < 0$ のとき

すべての実数 x, y に対して成り立つ

(i) か (iii) のときの可能性アリ

(i) のときは A と B が共通点をもたない。

$$\text{代入 } bx^2 + a(-x+1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (a+b)x^2 - 2ax + a - 1 = 0$$

$$D_4 = a^2 - (a+b)(a-1) < 0$$

$$\therefore -ab + b + a < 0$$

$$b(a-1) > a$$

$$\text{よって } a > 1 \text{ とき } b > \frac{a}{a-1} = \frac{1}{a-1} + 1$$

$$0 < a < 1 \text{ とき } b < \frac{a}{a-1} = \frac{1}{a-1} + 1$$

(iii) のときは $\frac{1}{b} > 1 \therefore 0 < b < 1$

(i), (iii) より

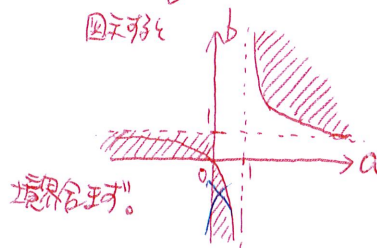
$a > 0$ かつ $b > 0$ かつ

$b(a-1) > a$

または

$a < 0$ かつ $0 < b < 1$

図示すると



$$= \frac{1}{N} \times \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{k-1}$$

[第28問]

n を正の整数とする。10進法で表した $n!$ について、1 の位から 10^{m-1} の位までの数字がすべて0で、 10^m の位の数字が0でないとき、関数 $f(n)$ の値を m とする。このとき、次の値を求めよ。

(1) $f(10)$, $f(100)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(10^n)}{10^n}$

m は $n!$ の素因数分解における、
因数5の個数に等しい。

$$m = \left[\frac{n}{5} \right] + \left[\frac{n}{5^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{5^q} \right] \quad \text{①}$$

(ただし $[x]$ は x を超える最大の整数)

a は $5^q \leq n$, $5^{q+1} > n$ もみたす整数)

(1) $f(10) = \frac{10}{5} = 2$

$f(100) = \frac{100}{5} + \frac{100}{5^2} = 24$

$(f(1000) = \frac{1000}{5} + \frac{1000}{5^2} + \frac{1000}{5^3} + \frac{1000}{5^4} = 249)$

[第29問]

自然数 n に対して、

$$I_n = \int_0^1 x^2 |\sin n\pi x| dx$$

とおく。極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ。

$n\pi x = t$ とおくと、 $n\pi = \frac{dt}{dx}$

$$I_n = \int_0^{n\pi} \left(\frac{t}{n\pi} \right)^2 |\sin t| \times \frac{1}{n\pi} dt$$

$$= \frac{1}{n^3 \pi^3} \int_0^{n\pi} t^2 |\sin t| dt$$

$$= \frac{1}{n^3 \pi^3} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} t^2 |\sin t| dt$$

ここで、 $t - (k-1)\pi = u$ とおくと

$$I_n = \frac{1}{n^3 \pi^3} \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \{u + (k-1)\pi\}^2 |\sin(u + (k-1)\pi)| du$$

$$= \frac{1}{n^3 \pi^3} \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \{u + (k-1)\pi\}^2 \sin u du$$

$$\left[(-\cos u) \{u + (k-1)\pi\}^2 \right]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos u) \times 2 \{u + (k-1)\pi\} du$$

$$= (\pi^2)^2 + (k-1)^2 \pi^2 + 2 \int_0^\pi (\sin u) \{u + (k-1)\pi\} du, \text{ Ak とおくと}$$

$$= (2k^2 - 2k + 1) \pi^2 + 2 \left(\int_0^\pi (\sin u) \{u + (k-1)\pi\} du - \int_0^\pi \sin u du \right)$$

「はみさす」でいいぞ!

(91 東工大)

→ (2) ①により、

$$\frac{10^n}{5} + \frac{10^n}{5^2} + \dots + \frac{10^n}{5^n} \leq f(10^n) < \frac{10^n}{5} + \frac{10^n}{5^2} + \dots$$

$$\text{よって } \sum_{m=1}^n \frac{10^m}{5^m} \leq f(10^n) < \sum_{m=1}^\infty \frac{10^m}{5^m}$$

$$\therefore \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{5} \right)^m \leq \frac{f(10^n)}{10^n} < \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{5^m}$$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{5} \right)^m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{5} \{1 - (\frac{1}{5})^{n+1}\}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{から } \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{1}{5} \right)^m = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

(はみさすの原理より) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(10^n)}{10^n} = \frac{1}{4}$

(08 東工大)

$$= (2k^2 - 2k + 1) \pi^2 + 2 \{0 + [\cos u]_0^\pi\}$$

$$= (2k^2 - 2k + 1) \pi^2 - 4$$

$$I_n = \frac{1}{n^3 \pi^3} \sum_{k=1}^n (2k^2 - 2k + 1) \pi^2 - 4$$

$$= \frac{1}{n^3 \pi} \left[2 \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 2 \times \frac{1}{2} n(n+1) + (\pi - 4) \right]$$

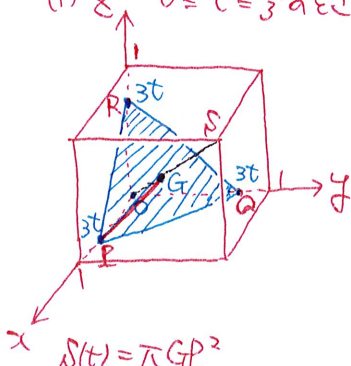
$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{3} \times 2$$

$$= \frac{2}{3\pi}$$

[第30問]

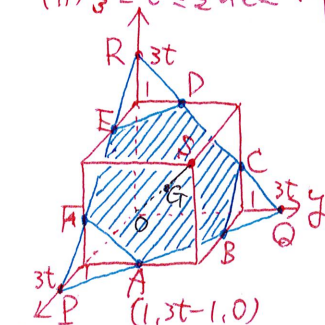
一辺の長さが1の立方体を、中心を通る対角線のうちの一本を軸として回転させたとき、この立方体が通過する部分の体積を求めよ。

(i) $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$ のとき



$$S(t) = \pi GP^2 \\ = \pi \left(\sqrt{3}t \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2}{3} \right)^2 \\ = 6\pi t^2$$

(ii) $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$ のとき



立方体の α による断面は図のような六角形 $ABCDEF$ であり、これは $GA = GB = GC = GD = GE = GF$ とあるから

$$S(t) = \pi GA^2 \\ = \pi \{ (1-t)^2 + (2t-1)^2 + t^2 \} \\ = \pi (8t^2 - 6t + 2)$$

(設定)

1辺の長さ1の立方体を、 xy 座標空間に設定する。 $OS (= \sqrt{3})$ とする。 $(0,0,0)$ と $(1,1,1)$ を結ぶ対角線に垂直な平面 α で立方体を切ったときの断面積を $S(t)$ とする。 α と座標軸との交点を $P(3t, 0, 0)$, $Q(0, 3t, 0)$, $R(0, 0, 3t)$ とすると $\triangle PQR$ は正三角形である。その重心は $G(t, t, t)$ とある。

→ 対称性も考慮して $OG = X$ とすれば

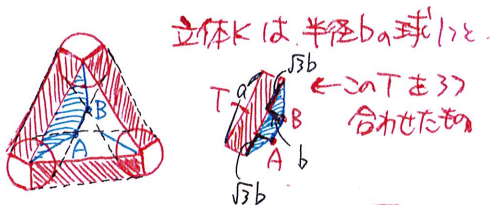
$$V = 2 \left(\int_0^{\frac{1}{3}} 6\pi t^2 dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \pi (8t^2 - 6t + 2) dx \right) \\ = 2\sqrt{3}\pi \left(\int_0^{\frac{1}{3}} 6t^2 dt + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (8t^2 - 6t + 2) dt \right) \\ = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

[第31問]

xyz 座標空間において、 $\triangle ABC$ は1辺を a とする正三角形であり、 xy 平面 (平面 $z=0$) 上にある。半径が b の球の中心が $\triangle ABC$ の辺上を動き、1周する。このとき、球が通過する部分のつくる図形を K とする。 $a \geq 2\sqrt{3}b$ とするとき、

(1) 図形 K の体積を求めよ。

(2) 図形 K の表面積を求めよ。

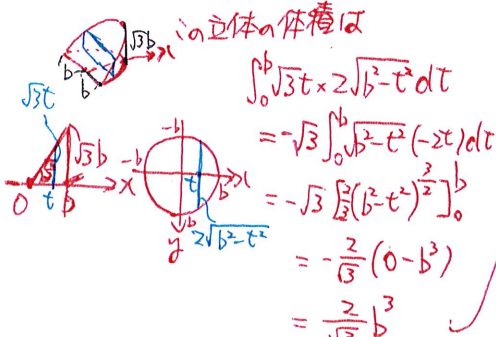


立体 K は、半径 b の球1つと、 $\triangle ABC$ の3つの辺に沿って動く球の軌跡の集合である。

立体 T の該当する体積と表面積をそれぞれ V, S とすると

$$V = \frac{4}{3}\pi b^3 + 3\left[\pi b^2 a - \frac{2}{3}\pi b^3 \right], S = 4\pi b^2 + 3[2\pi b a - 2\pi b^2]$$

(1) 図形 T は、底面半径 b 、高さ a の円柱から、次の立体 V を2つ除いたもの

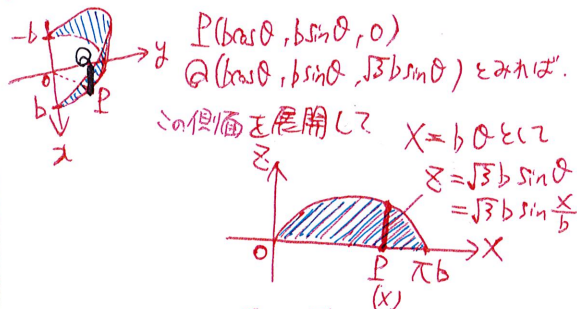


この立体の体積は

$$\int_0^b \sqrt{3}t \times 2\sqrt{b^2 - t^2} dt \\ = -\sqrt{3} \int_0^b \sqrt{b^2 - t^2} (-2t) dt \\ = -\sqrt{3} \left[\frac{1}{2} (b^2 - t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^b \\ = -\frac{\sqrt{3}}{2} (0 - b^3) \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} b^3$$

よって $V = \frac{4}{3}\pi b^3 + 3 \left[\pi b^2 a - \frac{2}{3}\pi b^3 \right] \\ = \frac{4}{3}\pi b^3 + 3\pi b^2 a - 2\pi b^3$

(2) 次に、表面積について。



この側面を展開して $X = b\theta$ とし $z = \sqrt{3}b \sin \theta = \sqrt{3}b \sin \frac{X}{b}$

$$\therefore \text{側面積は } \int_0^{\pi b} \sqrt{3}b \sin \frac{X}{b} dX \\ = [-\sqrt{3}b^2 \cos \frac{X}{b}]_0^{\pi b} = 2\sqrt{3}b^2$$

よって $S = 4\pi b^2 + 3 \left[2\pi b a - 2\pi b^2 \right] \\ = 4\pi b^2 + 6\pi a b - 2\pi b^2$

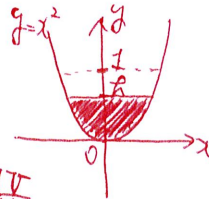
[第32問]

曲線 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) を y 軸のまわりに回転してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻 $t=0$ に排水口を開けて排水を開始する。時刻 t において容器

に残っている水の深さを h 、体積を V とする。 V の変化率 $\frac{dV}{dt}$ は $\frac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ で与えられる。

(1) 水深 h の変化率 $\frac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ。

(2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ。



(103 北大)

(1) 水深が h ときの水の体積 V は

$$V = \int_0^h \pi x^2 dy$$

$$= \int_0^h \pi y dy$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} h^2 \right)$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \times \frac{dh}{dt}$$

$$\left(\text{微積分の基礎定理} \right) = \pi h \times \frac{dh}{dt}$$

$$\rightarrow \text{よて} \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h} \times \frac{dV}{dt}$$

$$= \frac{1}{\pi h} \times (-\sqrt{h})$$

$$= -\frac{1}{\pi \sqrt{h}}$$

(2) $h=0$ とき t を求めよ。

$$(1) \text{より} \frac{dt}{dh} = -\pi \sqrt{h}$$

$$\therefore t = \int -\pi \sqrt{h} dh$$

$$= -\pi \times \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\rightarrow t=0 \text{ とき } h=1 \text{ より}$$

$$0 = -\frac{2}{3} \pi + C$$

$$\therefore C = \frac{2}{3} \pi$$

$$\therefore t = -\pi \times \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \pi$$

$$h=0 \text{ と } t = \frac{2}{3} \pi$$

$$\frac{2}{3} \pi //$$

[第33問]

xyz 空間内の円柱 $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$ を側面とする容器に、水面が $z=0$ と一致するように $z \leq 0$ の部分に水が入っている。 $z \geq 0$ に対して定義された連続な関数 $r(z)$ で

$$r(0) = 0, 0 \leq r(z) < R$$

をみたすものを考える。 xz 平面内の不等式

$$0 \leq x \leq r(z), z \geq 0$$

で表される領域を z 軸のまわりに1回転してできる回転体を毎秒1の速さで下に動かすと、 t 秒後には水面が $z = f(t)$ に上昇するという。

$t \geq 0$ に対して、 $f(t) = e^t - t - 1$ であるとき、関数 $r(z)$ を決定せよ。

(198 東大)

(図1) の $z \geq 0$ にある水の容積と

$z \leq 0$ の回転体の容積が等しいから、

$$\int_0^{t+f(t)} \pi \{r(u)\}^2 du = \pi R^2 f(t)$$

両辺 t について微分

$$\frac{d}{dt} \int_0^{t+f(t)} \pi \{r(u)\}^2 du = \pi R^2 f'(t)$$

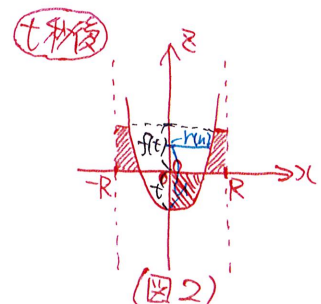
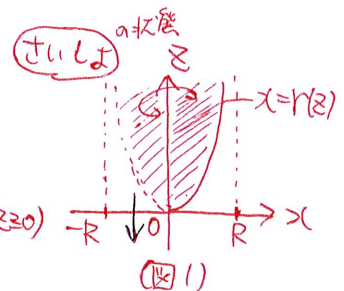
$$\therefore \pi \{r(t+f(t))\}^2 \times \{1+f'(t)\} = \pi R^2 f'(t)$$

$$f(t) = e^t - t - 1 \text{ を代入して } (f'(t) = e^t - 1)$$

$$\pi \{r(e^t - 1)\}^2 \times e^t = \pi R^2 (e^t - 1)$$

$$\therefore e^t - 1 = z \text{ とおくと } t \geq 0 \Leftrightarrow z \geq 0 \text{ である。}$$

$$\pi \{r(z)\}^2 \times (z+1) = \pi R^2 \times z$$



$1 \leq k \leq N$ のとき.

$$P_N(k) = \frac{(N+1)^{k-1}}{N^k}$$

数学的帰納法で
と存在を示す

(i) $k=1$ のとき

$$P_N(1) = \frac{1}{N} \text{ より成立。}$$

(ii) $k=1, 2, 3, \dots, l$ ($l \leq N-1$) のとき

$$P_N(1) = \frac{1}{N}, P_N(2) = \frac{N+1}{N^2}, P_N(3) = \frac{(N+1)^2}{N^3}, \dots, P_N(l) = \frac{(N+1)^{l-1}}{N^l} \quad \text{①}$$

と仮定すると.

$$\begin{aligned} P_N(l+1) &= \frac{1}{N} P_N(l) + \frac{1}{N} P_N(l-1) + \dots + \frac{1}{N} P_N(1) + \frac{1}{N} \\ &\quad \text{最初が1, 2回目からの和が2に存在する} \quad \text{最初が2, 2回目からの和が(2+1)に存在する} \quad \text{最初が3, 2回目からの和が3+1に存在する} \quad \text{最初が(2+1), 2回目からの和が(2+1)+1に存在する} \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \frac{(N+1)^{l-1}}{N^{l-1}} + \frac{(N+1)^{l-2}}{N^{l-2}} + \dots + \frac{N+1}{N^2} + \frac{1}{N} + 1 \right\} \quad (\text{①より}) \\ &= \frac{1}{N} \left\{ 1 + \frac{1}{N} + \frac{N+1}{N^2} + \dots + \frac{(N+1)^{l-1}}{N^l} \right\} \\ &= \frac{1}{N} \left[1 + \frac{\frac{1}{N} \left\{ \left(\frac{N+1}{N} \right)^l - 1 \right\}}{\frac{N+1}{N} - 1} \right] \\ &\quad \text{①の } \frac{1}{N}, \text{ ②の } \frac{N+1}{N}, \text{ ③の } l \text{ の等比数列の和。} \\ &= \frac{1}{N} \left\{ 1 + \left(\frac{N+1}{N} \right)^l - 1 \right\} \\ &= \frac{(N+1)^l}{N^{l+1}} \end{aligned}$$

よって $k=l+1$ のときも成立。

(i), (ii) より $1 \leq k \leq N$ の自然数 k について $P_N(k) = \frac{(N+1)^{k-1}}{N^k}$ (証明終)