

1

$0 \leq \theta < 2\pi$ とし, $x = \cos 2\theta - 2\sin \theta$ とする。

(1) x の最大値・最小値を求めよ。

(2) $y = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n$ のグラフを描け。

2

長さ $2a$ の線分の端点 A_1, A_2 を中心にもつ半径 r の 2 つの円の周上および内部をそれぞれ C_1, C_2 で表す。

C_1, C_2 の和集合 $C_1 \cup C_2$ から C_1, C_2 の共通部分 $C_1 \cap C_2$ を除いてできる図形の面積を

$S(r)$ とする。このとき、 $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(r)}{r}$ を求めよ。

3

a を 0 でない実数とする。

2つの曲線 $C_1: y=e^x$, $C_2: y=ax^2$ の両方に接する直線の本数を求めよ。

4

関数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + ax + b}$ が定める曲線 $y = f(x)$ は原点で直線 $y = x$ に接している。

- (1) b の値を求めよ。
- (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めよ。
- (3) $f(x)$ が最大値と最小値をもつような a の値の範囲を求め、そのときの $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。
- (4) $f(x)$ が最大値をもつが最小値はもたないとき、 a の値と $f(x)$ の最大値を求めよ。

5

$y = f(x) = xe^{-x}$ とする。

- (1) $f(x)$ の最大値 a とそのときの $x (=b)$ を求めよ。
- (2) $y = f(x), y = k, x = 0$ で囲む部分の面積を S_1 , $y = f(x), y = k, x \leq b$ で囲む部分の面積を S_2 とする。 $S_1 + S_2 = S$ を最小にする k の値と、そのときの最小値を求めよ。
(ただし, $0 < k < a$ とする)

6

すべての正の実数 x について、 $x^{\sqrt{a}} \leq a^{\sqrt{x}}$ となる正の実数 a を求めよ。

7

a, b, c を定数とし, 実数 x に対して, 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} + 2x^n + 2(ax^3 + bx^2 + c)}{x^n + 2}$$

が存在するとき, これを $f(x)$ とおく。

(1) $|x| < 1$ ならば $f(x) = \boxed{\text{ア}}$ であり, $|x| > 1$ ならば $f(x) = \boxed{\text{イ}}$ である。

(2) この $f(x)$ が $x=1$ で連続であるための条件は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(3) $x=-1$ で $f(x)$ が定まるための条件は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(4) $\boxed{\text{エ}}$ の条件を満たし, さらに, $f(x)$ が $x=1$ で微分可能であるならば

$a = \boxed{\text{オ}}, b = \boxed{\text{カ}}, c = \boxed{\text{キ}}$ である。

8

$f(x)$ はすべての実数 x, y に対して $f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x$ をみたす。

また、 $x=0$ で微分可能で $f'(0)=1$ とする。

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$ を求めよ。

(3) $f'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ。

(4) $g(x) = f(x) \times e^{-x}$ とおくことで $f(x)$ を求めよ。

9

$0 \leq t \leq \pi$ で $G(t) = \int_0^\pi |t-x| \sin^2 x dx$ を定義する。

- (1) $G(t)$ を求めよ。
- (2) $G(t)$ の最小値を求めよ。

10

m, n を自然数とする。第一象限内の曲線 $x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{n}} = 1$ と x 軸, y 軸とで囲まれる部分の面積を $A(m, n)$ とする。

(1) $A(m, 1)$ を求めよ。

(2) $A(m, n+1) = \frac{n+1}{m+1} A(m+1, n)$ であることを示せ。

(3) $A(m, n)$ を求めよ。

11

関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \quad (x > 0)$$

- (1) 関数 $f(x)$ の増減, 凹凸を調べよ。
(2) 4 以上の整数 k に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\int_k^{k+1} f(x) dx < f(k) < \int_{k-1}^k f(x) dx$$

- (3) 正の整数 n に対して, 定積分 $\int_n^{2n+1} f(x) dx$ を求めよ。

- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{\log k}{k}$ を求めよ。

12

(1) $n=1, 2, 3, \dots$ に対して,

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + R_n(x)$ とおくとき, $R_n(x)$ を x の分数式で表せ。

(2) 不等式 $\left| \int_0^1 R_n(x) dx \right| \leq \frac{1}{2n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を証明せよ。

(3) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots$ を求めよ。

13

r を正の実数とする。 xyz 空間において

$$x^2 + y^2 \leq r^2, y^2 + z^2 \geq r^2, z^2 + x^2 \leq r^2$$

をみたす点全体からなる立体の体積を求めよ。

14

n を自然数とする。 $y = \frac{1}{n^5}(x-n)(2n-x)$ と x 軸で囲む部分を y 軸のまわりに 1 回転

してできる立体の体積を V_n とする。

(1) V_n を n を用いて表せ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (V_{n+1} + V_{n+2} + V_{n+3} + \cdots + V_{2n})$ を求めよ。

15

$A(1, 0, 1)$ を含み, OA に垂直な平面 α がある (O は原点)。

α 上に A を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円 C を描き, C とその内部の円板 (α 上) を D とする。

D を z 軸のまわりに回転してできる立体を K とする。

(1) K の平面 $z = t$ による断面積 $S(t)$ を求めよ。

(2) K の体積 V を求めよ。

16

外から空気を入れて、球の形をした風船を膨らます装置がある。それを観測して、その風船の半径が r のとき、表面積が単位時間あたり $64\pi r e^{-r}$ の割合で増加していることをつきとめた。ただし、時刻 $t=0$ のとき $r=0$ と仮定する。また対数は自然対数とし、 e は自然対数の底とする。

(1) $\frac{dr}{dt}$ を r の式で表すと、 $\frac{dr}{dt} = \boxed{}$ である。

時刻 t を風船の半径 r の関数と思えば、 $\frac{dt}{dr} = \boxed{}$ である。

(2) 時刻 t における風船の体積を $V(t)$ とすると

$$\frac{dV(t)}{dt} = \boxed{} \pi \frac{\left\{ \log \left(\boxed{} t + \boxed{} \right) \right\}^2}{\boxed{} t + \boxed{}} \quad \text{である。}$$

17

座標平面上において、点 (x, y) は楕円 $4x^2 + 9y^2 = 36$ 上を動く。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $x + 2y$ の最大値を求めよ。

(2) $x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{3}{2}y^2$ の最大値を求めよ。

18

次のように、円 C_1 は直交座標に関する方程式で表され、曲線 C_2 は極方程式で表されている。

$$C_1 : x^2 + y^2 + 6x - 2y + 7 = 0$$

$$C_2 : r = \frac{1}{\sqrt{2} - \sin \theta}$$

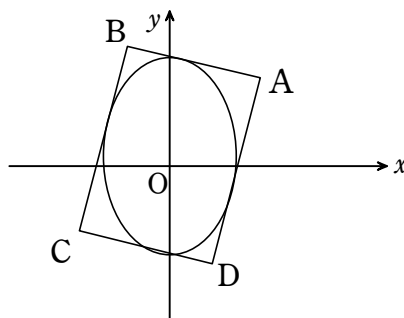
- (1) 円 C_1 を媒介変数を用いて表せ。
- (2) 曲線 C_2 はどのような曲線になるか。また、その概形もかけ。
- (3) 円 C_1 の中心を通り曲線 C_2 に接する直線の方程式を求めよ。

19

xy 平面上の長方形 $ABCD$ と円 $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ が図のように 4 点で接している。

辺 AB の傾きを $-m$ ($m > 0$) とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 原点 O と AB との距離を m を用いて表せ。
- (2) 長方形 $ABCD$ の面積の最大値とそのときの m の値を求めよ。



20

曲線 $C: x^2 - y^2 = 1$ ($x \geq 1$) と点 $P(4, 0)$ がある。

- (1) 曲線 C の接線と点 P との距離を d とするとき, d のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) 曲線 C の接線のうちで, 点 P からの距離が最小となるものの方程式を求めよ。

21

方程式 $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + ax + b) = 0$ の 4 つの解が複素数平面上で正方形の 4 頂点を表すように、実数 a, b の値を定めよ。

22

n 個の複素数 z_1, z_2, \dots, z_n が $z_1 + z_2 + \dots + z_n = i$ (i は虚数単位) をみたすものとして固定されている。 $|z|=1$ である複素数 z の中で

$$|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \dots + |z - z_n|^2$$

を最大, 最小にするものをそれぞれ求めよ。

23

- (1) xy 平面上の曲線 $x^2 - y^2 = 2$ を, 原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{4}$ 回転した曲線を G とする。曲線 G の方程式を求めよ。
- (2) a は 1 より大きい定数とする。曲線 $x^2 - y^2 = 2$ と直線 $x = \sqrt{2}a$ とで囲まれた図形の面積を求めよ。

24

複素数平面上において、 z は原点 O を中心とする半径 1 の円周上を動くとする。

$$w = \frac{z-i}{z-1-i}$$

とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 w のえがく曲線を求めよ。
- (2) 絶対値 $|w|$ の最大値およびそのときの z の値を求めよ。