

1

$0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ に対して次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$\sin \frac{x+y}{2} \geq \frac{1}{2} (\sin x + \sin y)$$

2

$y = 4 \sin 2x (\sin x + \cos x) + \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ について答えよ。($0 \leq x \leq \pi$)

- (1) 最大値とそのときの x の値を求めよ。
- (2) 最小値を求めよ。また, そのときの x を θ とするとき, $\sin \theta, \cos \theta$ の値を求めよ。

3

実数 x に対して、 $t=2^x+2^{-x}$ 、 $y=4^x-6\cdot 2^x-6\cdot 2^{-x}+4^{-x}$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) x が実数全体を動くとき、 t の最小値を求めよ。
- (2) y を t の式で表せ。
- (3) x が実数全体を動くとき、 y の最小値を求めよ。
- (4) a を実数とするとき、 $y=a$ となるような x の個数を求めよ。

4

- (1) $\log_{10}(-y^2 - 2xy + y + x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) \geq \log_{10}(-2x^2 + 2x + 1)$ で表される領域を図示せよ。
- (2) (1)の領域において、 $x+y$ の 最大値 , 最小値を求めよ。

5

(1) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}}y \\ \log_2(x^2+y^2-4x-2y+5) \leq \log_2 5 \end{cases}$$

(2) a を正の数とする。点 (x, y) が (1) で求めた領域を動くとき、 $ax+y$ の最大値が4になるように a の値を定めよ。

6

実数 x, y が $x^2 + y^2 \leq 1$ を満たしながら変化するとする。

- (1) $s = x + y, t = xy$ とするとき、点 (s, t) の動く範囲を st 平面上に図示せよ。
- (2) 負でない定数 $m \geq 0$ をとるとき、 $xy + m(x + y)$ の最大値、最小値を m を用いて表せ。

7

xy 平面上の放物線 $A: y = x^2$, $B: y = -(x - a)^2 + b$ について
これらは異なる 2 点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ($x_1 > x_2$) で交わるとする。

- (1) $x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき, b を a で表せ。
- (2) $x_1 - x_2 = 2$ を満たしながら a, b が変化するとき, 直線 PQ の通過する領域を求め
図示せよ。
- (3) $|\overrightarrow{PQ}| = 2$ を満たしながら a, b が変化するとき, 線分 PQ の中点の y 座標の最小値
を求めよ。

8

- (1) a が実数を動くとき, $y = ax - 2a^2 + 1$ という直線が通過しうる領域を図示せよ。
- (2) a を正の定数とする。 $P: y = ax^2$ 上の動点 A を中心とし, x 軸に接する円を C とする。動点 A が P 上のすべての点を動くとき, 円 C の内部に含まれる領域を図示せよ。

9

$y=x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) 上の動点 P を頂点とし、 x 軸上に長さ2の底辺をもつ二等辺三角形を T とする。

ただし、 P が原点のとき T は2点 $(-1, 0), (1, 0)$ を端点とする線分とする。

(1) P の x 座標を a とし、 T の左側の辺を含む直線を $y=f_a(x)$ とする。

x ($-1 \leq x \leq 1$) を固定したとき、 $f_a(x)$ の a に関する最大値を求めよ。

(2) P が動くとき、 T の辺が動く範囲の面積を求めよ。

10

a を実数とし，関数 $f(x) = x^3 - 3ax + a$ を考える。 $0 \leq x \leq 1$ において $f(x) \geq 0$ となるような a の値の範囲を求めよ。

11

実数 t に対して

$$f(t) = \int_0^1 (3x^2 + tx - 2|x^2 - tx|) dx$$

とおく。 t が実数全体を動くとき、 $f(t)$ の最大値と、最大値を与える t を求めよ。

12

放物線 $y=(x-2)^2$ を C , 直線 $y=x+k$ を l とする。

C と l は $x>0$ の範囲で異なる 2 点で交わり, その 2 点の x 座標を α, β ($\alpha<\beta$) とする。

このとき, 実数 k のとり得る値の範囲は で, k を β を用いて表すと,

$k =$ $である。$

C と l が囲む部分の面積を S_1 , C と l と y 軸が囲む部分の面積を S_2 とする。

$S_1=S_2$ が成り立つとき, $\alpha =$, $\beta =$, $k =$ である。

13

- (1) n を自然数とする。 $y \leq 2n^2, y \geq \frac{1}{2}x^2, x \geq 0$ を同時に満たす整数の組 (x, y) の個数を求めよ。
- (2) n を自然数とする。 $y \geq 0, y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq n^2$ を満たす整数の組 (x, y) の個数を求めよ。

14

M, E, D の3文字をこの順序に繰り返し並び、次のように n 番目が n 個の文字からなる文字列群 (A) を作る。

(A) $M, ME, MED, MEDM, MEDME, MEDMED, \dots$

次に、文字列群 (A) を連続して並べた文字列 (B) を作る。

(B) $MMEMEDMEDMMEDMEMEDMED\dots$

次の問いに答えよ。

- (1) 文字列 (B) の758番目の文字は、文字列群 (A) において、何番目の文字列の何番目の文字であるか。またその文字は、 M, E, D のどれか。
- (2) 文字列 (B) の最初から758番目の文字までに現れる M, E, D のそれぞれの個数を求めよ。

15

数列 $\{a_n\}$ に対して,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(a_k + \frac{1}{k+1} \right) = 2^n + 1 - \frac{1}{n+1}$$

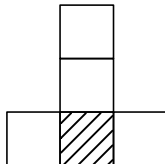
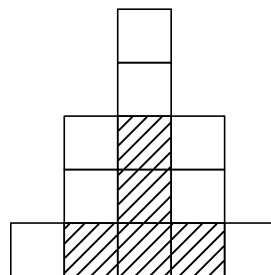
がすべての自然数 n について成り立っているとき, 次の問いに答えよ。

(1) a_n を求めよ。

(2) $\sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。

16

下図のような同じ正方形でつくられた図形 $A_1, A_2, A_3 \cdots$ がある。

 A_1  A_2  A_3

A_1 は正方形 1 つ, A_2 は A_1 の正方形の上の 2 つ正方形をのせ, 左右に 1 つずつ正方形をつけたものである。3 番目以降の図形 A_n は図形 A_{n-1} の上に正方形を 2 つずつのせ, 1 番下の段の左右に 1 つずつつけたものである。 A_n の正方形の総数を a_n とする。

- (1) A_n の 1 番下の段には正方形がいくつ並んでいるか。
- (2) $a_n - a_{n-1}$ を求めよ。ただし, $n \geq 2$ とする。
- (3) a_n を求めよ。

17

(1) 方程式 $3x^2 - 6x + 2 = 0$ は2つの相異なる実数解をもち、それらはいずれも0でないことを示せ。

(2) α, β を(1)の方程式の相異なる解とする。

自然数 n に対し、 $A_n = (\alpha^{-n} + \beta^{-n})(\alpha + \beta)^n$ とおく。

すべての自然数 n について A_n は整数となることを示せ。

18

数列 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ を次のように定義する。

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

以下の各問いに答えよ。

(1) a_1, a_2, a_3 を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) $b_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a_k a_{n-k} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$ を求めよ。

19

\vec{a}, \vec{b} はともに平面上の大きさ 1 のベクトルで, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ を満たすとする。

ただし, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は内積を表す。

(1) ベクトル $\vec{a} + 2\vec{b}$ の大きさ $|\vec{a} + 2\vec{b}|$ を求めよ。

(2) 内積 $(\vec{c} + \vec{a}) \cdot (\vec{c} + 2\vec{b})$ を最大にする大きさ 1 のベクトル \vec{c} を \vec{a}, \vec{b} で表せ。

また, その最大値を求めよ。

20

平面上の $\triangle ABC$ において、辺 AB を $4:3$ に内分する点を D 、辺 BC を $1:2$ に内分する点を E とし、線分 AE と CD の交点を O とする。

- (1) $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$ 、 $\overrightarrow{AC}=\vec{q}$ とするとき、ベクトル \overrightarrow{AO} を \vec{p} 、 \vec{q} で表せ。
- (2) 点 O が $\triangle ABC$ の外接円の中心になるとき、3辺 AB 、 BC 、 CA の長さの2乗の比を求めよ。

21

図－Ⅰのような $AB=BC=CD=DA=AC=1$ である四角形 $ABCD$ を考える。

この四角形 $ABCD$ を AC で折り, 図－Ⅱのように

点 B, C, D が平面 P にのるように置く。

図－Ⅱに現れる辺 CB と辺 CD とがなす角を α , $\alpha = \angle BCD$ とし, $0^\circ < \alpha < 120^\circ$ とする。

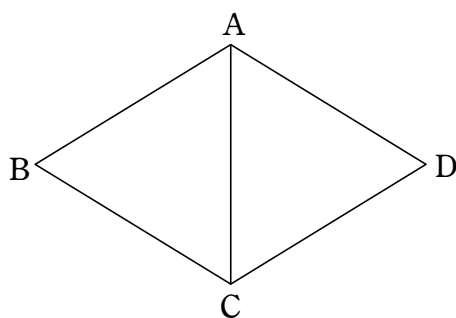
以下の問いに答えよ。

- (1) 図－Ⅱにおいて, A から平面 P に下ろした垂線が P と交わる点を H とする。

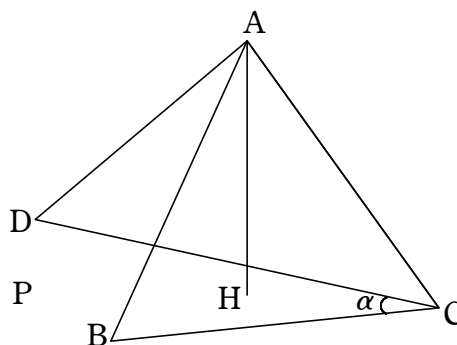
\overrightarrow{AH} を $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}$ と α とで表せ。

- (2) \overrightarrow{AH} の長さを α を用いて表せ。

- (3) H が図－Ⅱにおける三角形 BCD の重心となるときの角度 α を求めよ。



図－Ⅰ



図－Ⅱ

22

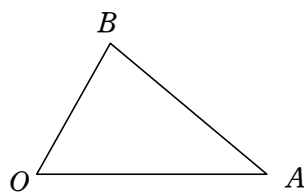
O を原点とする座標空間に 2 点 $A(1, 0, 3)$, $B(2, 5, -4)$ をとり, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) \vec{a}, \vec{b} のなす角を θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) とするとき, $\sin \theta$ の値を求めよ。
- (2) ベクトル \overrightarrow{OC} が \vec{a}, \vec{b} のいずれとも垂直になるような点 $C(x, y, z)$ のうちで $z=1$ となるものを求めよ。
- (3) 原点 O と(2)で求めた点 C を通る直線を l とする。
点 $D(0, 0, 7)$ から l に下ろした垂線が l と交わる点を P とする。 P の座標を求めよ。
- (4) 四面体 $OABP$ の体積 V を求めよ。

23

三角形 OAB がある。 α, β が次の条件を満たしながら変化するとき,
 $\overrightarrow{OP} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$ で定義される点 P の存在範囲を図示せよ。

- (1) $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$
- (2) $-1 \leq \alpha \leq 1, -1 \leq \beta \leq 1$
- (3) $\alpha - \beta = 1, \alpha \geq 0$
- (4) $2\alpha + \beta \leq 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$



24

空間内に3点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ をとる。

- (1) 空間内の点 P が $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}) = 0$ をみたしながら動くとき, この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ。
- (2) (1) における定点 Q は3点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ。
- (3) (1) における P について, 四面体 $ABCP$ の体積の最大値を求めよ。