

1

不等式  $\left| x - \frac{2}{7} \right| < \frac{18}{7}$  を満たす整数  $x$  の個数は  である。正の数  $a$  に対して、  
不等式  $\left| x - \frac{2}{7} \right| < a$  を満たす整数  $x$  の個数が4 であるとき、 $a$  のとりうる値の範囲は  
 である。

2

実数  $a, b$  は  $0 < a < b$  を満たし,  $x, y, z$  はいずれも  $a$  以上かつ  $b$  以下であるとする。  
次の (1), (2) を示せ。

- (1)  $x + y = a + b$  ならば,  $xy \geq ab$  である。
- (2)  $x + y + z = a + 2b$  ならば,  $xyz \geq ab^2$  である。

3

$xy$  平面上の原点と点  $(1, 2)$  を結ぶ線分 (両端を含む) を  $L$  とする。

曲線  $y = x^2 + ax + b$  が  $L$  と共有点を持つような実数の組  $(a, b)$  の集合を  $ab$  平面上に図示せよ。

4

$$F = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)t^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)t + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1) どんな実数  $t$  に対しても  $F \geq 0$  を示せ。
- (2)  $(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$  を示せ。
- (3)  $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$ ,  $b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \neq 0$  のとき、

$$-1 \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}} \leq 1 \text{ を示せ。}$$

- (4)  $n$  個の値  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  の平均値を  $\bar{x}$ ,  $y_1, y_2, \cdots, y_n$  の平均値を  $\bar{y}$  とし、

$$a_1 = x_1 - \bar{x}, a_2 = x_2 - \bar{x}, \cdots, a_n = x_n - \bar{x}$$

$$b_1 = y_1 - \bar{y}, b_2 = y_2 - \bar{y}, \cdots, b_n = y_n - \bar{y} \text{ とする。}$$

また、 $x, y$  の標準偏差をそれぞれ  $s_x, s_y$ , 共分散を  $s_{xy}$ , 相関係数を  $r$  とおくとき、

$$-1 \leq r \leq 1 \text{ を示せ。}$$

5

$a, b, c$  を実数とする。次の文章の空欄  に当てはまるものを (ア), (イ), (ウ), (エ) から選び, (ア) または (エ) を選んだ場合は, 十分ではない例をあげよ。

(1) 実数を係数とする  $x$  の整式  $f(x)$  が, 2 次式  $(x-a)(x-b)$  で割り切れるためには,

$f(a)=f(b)=0$  が成り立つことが

(2)  $at^2+bt+c=0$  を満たす実数  $t$  が存在するためには,  $b^2-4ac \geq 0$  が成り立つことが

(3)  $a^2+b^2 < a+b$  が成り立つためには,  $a > 0$  または  $b > 0$  が成り立つことが

(ア) 必要であるが十分ではない。

(イ) 十分であるが必要でない。

(ウ) 必要かつ十分である。

(エ) 必要でも十分でもない。

6

自然数  $n$  に対し,  $n$  以下の自然数で  $n$  との最大公約数が  $1$  であるような自然数の個数を  $f(n)$  とする。例えば  $f(12)$  は  $1, 5, 7, 11$  の  $4$  つより  $f(12)=4$ 。また,  $f(1)=1$  とする。

- (1)  $f(77)$  を求めよ。
- (2)  $f(pq)=24$  となる  $2$  つの素数  $p, q$  ( $p < q$ ) の組を求めよ。
- (3)  $k, n$  を自然数とすると,  $f(2^k 3^n)$  を  $k$  と  $n$  で表せ。

7

- (1)  $\sqrt{n^2+72}$  が整数となるような自然数  $n$  をすべて求めよ。
- (2)  $\frac{4x+1}{4x^2+2}$  が整数となるような実数  $x$  をすべて求めよ。

8

$m, n$  は  $m \geq n$  を満たす自然数とする。

(1)  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{8}$  を満たす自然数の組  $(m, n)$  をすべて求めよ。

(2)  $p$  を 3 以上の素数とすると、 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p^2}$  を満たす自然数の組  $(m, n)$  を  $p$  を用いて表せ。

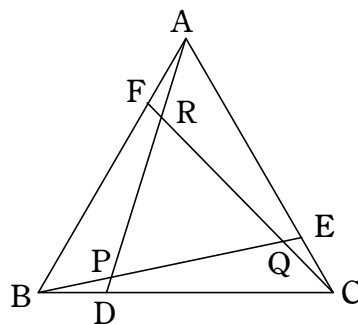


9

右図の正三角形  $ABC$  において、辺  $BC$ 、辺  $CA$ 、辺  $AB$  を  $m:n(0 < m < n)$  に内分する点をそれぞれ  $D, E, F$  とする。また、線分  $AD$  と  $BE$  の交点を  $P$ 、線分  $BE$  と  $CF$  の交点を  $Q$ 、線分  $CF$  と  $AD$  の交点を  $R$  とする。このとき、次の各問いに答えよ。

(1)  $\triangle PQR$  は正三角形であることを示せ。

(2)  $AR:AP = m:n$  であることを示せ。

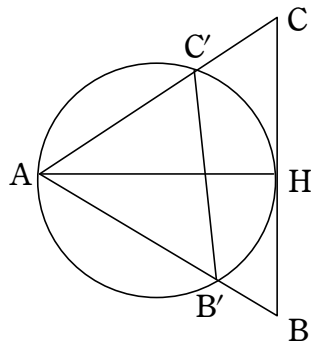


10

三角形 $ABC$ において、 $AB=2\sqrt{5}$ 、 $BC=5$ 、 $CA=5$ とする。 $A$ から $BC$ に下ろした垂線を $AH$ とする。 $AH$ を直径とする円と $AB$ との交点を $B'$ 、 $AC$ との交点を $C'$ とする。

(1)  $AB'$ 、 $AC'$ 、 $B'C'$ の長さを求めよ。

(2)  $\triangle AB'C'$ の面積を求めよ。



11

$AB=AC$ ,  $BC=1$ ,  $\angle ABC=72^\circ$  の三角形  $ABC$  を考える。 $\angle ABC$  の二等分線と辺  $AC$  の交点を  $D$  とする。次の問いに答えよ。

(1)  $AD$  の長さと  $AC$  の長さを求めよ。

(2)  $\cos 72^\circ$  を求めよ。

(3) 三角形  $ABD$  の内接円の半径を  $r$ , 三角形  $CBD$  の内接円の半径を  $s$  とするとき,  $\frac{r}{s}$  の値を求めよ。

12

- (1) 正四面体 $ABCD$ の頂点 $A$ から三角形 $BCD$ へ下ろした垂線の足を $E$ とするとき,  
 $E$ は三角形 $BCD$ の3つの頂点 $B, C, D$ から等距離にあることを示せ。
- (2)  $\angle ABE = \theta$  とするとき,  $\cos \theta$  の値を求めよ。
- (3) 正四面体 $ABCD$ の4つの頂点が半径1の球面上にあるとき, 正四面体 $ABCD$ の  
1辺の長さを求めよ。

13

平面上の正方形の4頂点を  $n$  種類の色で塗る方法を考える。ただし、回転して同じになるものは1つとし、同じ色を何度使ってもよいし、使わない色があってもよいとする。

- (1)  $n=2, 3$  のとき、塗り方はそれぞれ何通りあるか。
- (2)  $n \geq 4$  のとき、塗り方は何通りあるか。

14

以下の各問いに答えよ。

- (1) 次の 3 条件 (a), (b), (c) を満たす整数の組  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  の個数を求めよ。
- (a)  $a_1 \geq 1$
  - (b)  $a_5 \leq 4$
  - (c)  $a_i \leq a_{i+1} (i = 1, 2, 3, 4)$
- (2) 次の 3 条件 (a), (b), (c) を満たす整数の組  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  の個数を求めよ。
- (a)  $a_1 \geq 1$
  - (b)  $a_i \geq 0 (i = 2, 3, 4, 5)$
  - (c)  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 4$
- (3)  $n$  桁の自然数で各桁の数字の合計が  $r$  以下となるものの個数を  $n, r$  を用いて表せ。  
ただし  $n \geq 1, r \leq 9$  とする。

15

1 から 10 までの異なった整数の書かれた 10 個の玉の入った袋がある。

この袋から 10 個の玉を 1 個ずつ取り出す。ただし, 取り出した玉は袋に戻さないとする。

$k$  番目に取り出した玉に書かれている整数を  $a_k$  とする。

(1)  $a_1, a_2, a_3, a_4$  の中に 10 が入っている確率を求めよ。

(2)  $a_1 < a_2 < a_3$  である確率を求めよ。

(3)  $a_1 < a_2 < a_3$  かつ,  $a_3 > a_4$  である確率を求めよ。

16

$P(x, y, z)$  は次の 1 秒で  $x, y, z$  のどれかの座標を等確率  $\frac{1}{3}$  ずつで +1 だけ移動する。

$P(x, y, z)$  は原点  $(0, 0, 0)$  を出発し,  $x=3$  または  $y=3$  または  $z=2$  になったところで停止する。

- (1)  $P$  が停止したとき,  $P(1, 0, 2)$  である確率を求めよ。
- (2) 3 秒後に  $P$  が停止する確率を求めよ。
- (3)  $P$  が停止したとき,  $P$  の  $z$  座標が 0 である確率を求めよ。
- (4)  $P$  が停止したとき,  $P(3, 2, 1)$  である確率を求めよ。
- (5)  $P$  の  $x$  座標が 3 で停止する確率を求めよ。



17

箱の中に 1 番から  $N$  番までの番号札が 1 枚ずつ合計  $N$  枚入っている。  
この箱から同時に 4 枚の番号札を取り出す。この 4 枚の札の中で、最小の番号が 3 である確率を  $P_N$  とする。ただし、 $N \geq 6$  とする。

- (1)  $P_N$  を求めよ。
- (2)  $P_N < P_{N+1}$  となる  $N$  をすべて求めよ。
- (3)  $P_N$  を最大にする  $N$  とその最大値を求めよ。