
[第 1 問]

N を正の整数とする。 $2N$ 以下の正の整数 m, n からなる組 (m, n) で、
方程式 $x^2 - nx + m = 0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか。

[第 2 問]

a と b を実数とする。 x の方程式

$$8^x - a(4^x - 1) + b(2^x - 1) - 1 = 0$$

が 0 または負である異なる 3 個の実数解をもつとき、 a と b が満たす条件を求め、それを図示せよ。

[第3問]

実数 a が $-1 \leq a \leq 1$ の範囲を動くとき、直線 $y = 2ax - a^2$ の $a - 1 \leq x \leq a + 1$ の部分が通過する範囲を図示し、その面積を求めよ。

[第4問]

関数 $f(x) = \sin x + \sin(x + 2\theta)$ について、 θ を $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ で動かしたときの $0 \leq x \leq \pi$ における曲線 $y = f(x)$ の通過範囲を xy 座標平面上に図示せよ。

[第5問]

関数 $f(x)=x^3+ax^2+(b-a-1)x$ について次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ が $x \geq 0$ で増加するような点 (a, b) の範囲 G を図示せよ。
- (2) $y \geq 0$ における $y=f(x)$ の逆関数を $x=f^{-1}(y)$ ($x \geq 0$) とする。点 (a, b) が G を動くとき、定積分 $\int_0^b f^{-1}(y)dy$ の最小値を求めよ。

[第6問]

実数 a, b に対し, $f(x)=x^3+x^2+(a+b-a^2)x+ab$ とおく。

- (1) $f(x)$ を因数分解せよ。
- (2) すべての $x \geq 0$ に対し, $f(x) \geq 0$ が成り立つための a, b の条件を求め, それを満たす (a, b) の存在する範囲を図示せよ。

[第7問]

$n=1, 2, 3, \dots$ に対して x の整式

$$P_n(x) = x^3 - nx^2 - (2n+12)x - 8$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 3次方程式 $P_n(x)=0$ の正の実数解はただ1つであることを示せ。

(2) t が $P_n(x)=0$ の解であるとき、 $P_n\left(-\frac{4}{t+2}\right)$ を求めよ。

(3) $P_n(x)=0$ の正の実数解を α_n とするとき、 $P_n(x)=0$ の最小の実数解 β_n を α_n で表せ。

さらに、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ を求めよ。

[第8問]

実数 a, b は、 $a \geq 1, b \geq 1$ を満たすとする。このとき、次の2つの方程式

$$ax^2 + (a+1)x + (a+2) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$bx^3 + (b+1)x^2 + (b+2)x + (b+3) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

は共通解をもたないことを示せ。

[第9問]

n を3以上の自然数とするとき、次を示せ。

ただし、 $\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ とし、 i を虚数単位とする。

(1) $\alpha^k + \overline{\alpha}^k = 2 \cos \frac{2\pi k}{n}$ ただし、 k は自然数とし、 $\overline{\alpha}$ は α に共役な複素数とする。

(2) $n = (1 - \alpha)(1 - \alpha^2) \cdots (1 - \alpha^{n-1})$

(3) $\frac{n}{2^{n-1}} = \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{n-1}{n} \pi$

[第10問]

次の連立方程式 (※) を考える。

$$(※) \begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ z = 2y^2 - 1 \\ x = 2z^2 - 1 \end{cases}$$

(1) $(x, y, z) = (a, b, c)$ が (※) の実数解であるとき、 $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$, $|c| \leq 1$ であることを示せ。

(2) (※) は全部で8個の相異なる実数解をもつことを示せ。

[第11問]

3辺の長さが $1, 1, a$ である三角形の面積を、周上の2点を結ぶ線分で2等分する。
それらの線分の長さの最小値を a を用いて表せ。

[第12問]

$\triangle ABC$ において、辺 AB の中点 M 、辺 AC の中点を N とする。
辺 AB を $x : (1 - x)$ ($0 \leq x < 1$) の比に内分する点 P と、辺 AC を $y : (1 - y)$ ($0 \leq y < 1$) の比に内分する点 Q をとり、線分 BQ と線分 CP の交点を R とする。
このとき、 R が $\triangle AMN$ に含まれるような (x, y) 全体を xy 平面に図示せよ。
(ただし、辺 AB 、辺 AC を $0 : 1$ の比に内分する点とは、ともに点 A のこととする)

[第13問]

$AB=3$, $AC=4$, $BC=5$, $AD=6$, $BD=7$, $CD=8$ である。

四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。

[第14問]

正二十面体は 20 個の正三角形のそれぞれの辺をつなぎ合わせて得られる多面体であり、各頂点の周りには 5つの正三角形が集まっている。

この隣り合う2面のなす角を θ としたとき、 $\cos \theta$ の値はいくらか。

[第15問]

正四面体の4つの頂点を A , B , C , D とする。 s, t を $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ を満たす実数とし、線分 AB を $s : (1-s)$ に内分する点を E , 線分 AC を $t : (1-t)$ に内分する点を F , 線分 AD を $t : (1-t)$ に内分する点を G とおく。

3点 E , F , G を通る平面が、3点 B , C , D を通る円と共有点をもつために、 s, t の満たすべき条件を求め、点 (s, t) の範囲を平面上に図示せよ。

[第16問]

平面上に点 O を中心とする半径1の円 C がある。また、この平面上の O と異なる点 A を通って直線 OA と垂直な空間直線 l があり、平面とのなす角が 45° である。このとき、円 C と直線 l の間の最短距離を、2点 O, A 間の距離 a で表せ。

[第17問]

a が与えられた実数のとき、 xyz 空間の点 $C(a, 0, 3)$ から出た光が球

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$$

でさえぎられてできる xy 平面上の影を S とすると、 S の領域を図示せよ。

[第18問]

3以上9999以下の奇数 a で、 $a^2 - a$ が10000で割り切れるものをすべて求めよ。

[第19問]

a, b, c は整数で、 $a < b < c$ を満たす。

放物線 $y = x^2$ 上に3点 $A(a, a^2), B(b, b^2), C(c, c^2)$ をとる。

- (1) $\angle BAC = 60^\circ$ とはならないことを示せ。ただし、 $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明なしに用いてよい。
- (2) $a = -3$ のとき、 $\angle BAC = 45^\circ$ となる組 (b, c) をすべて求めよ。

[第20問]

4つの正多角形を1点の周りに重なりもせず，すきまもなく並べて敷きつめるには，どのような正多角形を用いたらよいか。すべての場合をあげよ。

[第21問]

10進法表示の n 桁の正の整数で，隣り合う桁の数字が互いに相異なるような数の個数を a_n とするとき，次の問いに答えよ。ただし， $n \geq 2$ とする。

(1) a_n を求めよ。

(2) 上の数のうちで，1の位の数字が0である数の個数を b_n とするとき， b_n を求めよ。

[第22問]

座標平面上で、 $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n, \dots$ はすべて円であり、次の条件を満たしている。

- (i) O_1 は、中心 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 、半径 $\frac{1}{2}$ の円である。
 - (ii) 各 $O_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ の中心は y 軸上にあり、その座標を $(0, p_n)$ とすると、 $0 < p_n < p_{n+1}$ である。
 - (iii) 各 $O_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ は放物線 $y = x^2$ に接し、 O_{n+1} は O_n に外接している。
- このとき、円 O_n の直径、およびその中心の y 座標 p_n を求め、 n の式で表せ。

[第23問]

1 辺の長さが 1 の正四面体 $ABCD$ の辺上を、いくつかの粒子が次の規則に従って毎秒 1 の速さで運動している。

規則 1：各粒子は辺の途中で向きを変えることはなく、ある頂点を出発した粒子はちょうど 1 秒後に別の頂点に達する。

規則 2：各粒子は頂点に達すると、その頂点を端点とする 3 辺のいずれかに、それぞれ確率 $\frac{1}{3}$ で進む。

規則 3：粒子どうしは辺の途中で正面衝突しても互いにすり抜けてそのまま進むが、同一頂点に 2 個以上の粒子が同時に達すると、それらは瞬時に合体し、以後は 1 個の粒子として運動する。

今、ちょうど 3 個の粒子が存在し、それぞれ頂点 A, B, C に同時に達したところである。 $(n + 0.1)$ 秒後にちょうど k 個の粒子が存在する確率を $P_k(n)$ とするとき、以下の問いに答えよ。ただし n は自然数とする。

- (1) $P_1(1), P_2(1), P_3(1)$ を求めよ。
- (2) ちょうど n 秒後に粒子が 3 個から 2 個になる確率 $Q(n)$ を求めよ。
- (3) $P_2(n), P_1(n)$ を求めよ。

[第24問]

集合 $T = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ について, α, β, γ は相異なる 0 でない複素数であり, そのうちの 2 個の積も (同じ数どうしの積も含める) もとの 3 つの複素数のうちのどれかであるという。

- (1) $S = \{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\}$ とおくと, 集合 S の要素の個数は 3 個以下であることを証明せよ。
(2) 集合 $T = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ を決定せよ。

[第25問]

xy 平面において, 集合 $A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x + y \geq 1\}$ および 0 でない実数 a, b によって定められる 集合 $B = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \leq \frac{1}{ab}\}$ を考える。 $A \cap B$ が空集合になるための a, b の条件を求め, この条件を満たす点 (a, b) の存在範囲を図示せよ。

[第26問]

図のように、正三角形を9つの部屋に辺で区切り、部屋P, Qを定める。1つの球が部屋Pを出発し、1秒ごとに、そのままその部屋にとどまることなく、辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋Qにある確率を求めよ。

[第27問]

箱の中に1から N までの番号が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。この箱から無作為にカードを1枚取り出して戻すという試行を k 回行う。このとき、はじめから j 回目($j = 1, 2, \dots, k$)までに取り出したカードの番号の和を X_j とし、 X_1, X_2, \dots, X_k のうちのどれかが k となる確率を $P_N(k)$ とする。

(1) $N \geq 3$ のとき、 $P_N(1), P_N(2), P_N(3)$ を N で表せ。

(2) $k \leq N$ のとき、 $P_N(k)$ を N と k で表せ。

[第28問]

n を正の整数とする。 10 進法で表した $n!$ について、 1 の位から 10^{m-1} の位までの数字がすべて 0 で、 10^m の位の数字が 0 でないとき、関数 $f(n)$ の値を m とする。このとき、次の値を求めよ。

(1) $f(10), f(100)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(10^n)}{10^n}$

[第29問]

自然数 n に対して、

$$I_n = \int_0^1 x^2 |\sin n\pi x| dx$$

とおく。極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ。

[第30問]

一辺の長さが1の立方体を、中心を通る対角線のうちの一本を軸として回転させたとき、この立方体が通過する部分の体積を求めよ。

[第31問]

xyz 座標空間において、 $\triangle ABC$ は1辺を a とする正三角形であり、 xy 平面 (平面 $z=0$) 上にある。半径が b の球の中心が $\triangle ABC$ の边上を動き、1周する。このとき、球が通過する部分のつくる図形を K とする。 $a \geq 2\sqrt{3}b$ とするとき、

- (1) 図形 K の体積を求めよ。
- (2) 図形 K の表面積を求めよ。

[第32問]

曲線 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) を y 軸のまわりに回転してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻 $t=0$ に排水口を開けて排水を開始する。時刻 t において容器に残っている水の深さを h 、体積を V とする。 V の変化率 $\frac{dV}{dt}$ は $\frac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ で与えられる。

(1) 水深 h の変化率 $\frac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ。

(2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ。

[第33問]

xyz 空間内の円柱 $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$ を側面とする容器に、水面が $z=0$ と一致するように $z \leq 0$ の部分に水が入っている。 $z \geq 0$ に対して定義された連続な関数 $r(z)$ で

$$r(0) = 0, 0 \leq r(z) < R$$

をみたすものを考える。 xz 平面内の不等式

$$0 \leq x \leq r(z), z \geq 0$$

で表される領域を z 軸のまわりに1回転してできる回転体を毎秒1の速さで下に動かすと、 t 秒後には水面が $z = f(t)$ に上昇するという。

$r \geq 0$ に対して、 $f(t) = e^t - t - 1$ であるとき、関数 $r(z)$ を決定せよ。

[お仕上げ問題]

円 $C: x^2 + y^2 = 1$, 双曲線 $D: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ がある。以下の問いに答えよ。

- (1) 円 C の外部の点 $P(a, b)$ から C に引いた接線の接点を A, B とする。直線 AB の方程式は $ax + by = 1$ であることを証明せよ。
- (2) 双曲線 D 上の点 $Q(a, b)$ ($a > 0$)における接線が、円 C と異なる2点で交わるような a の範囲を求めよ。さらに、その2点における円 C の接線の交点 R の軌跡を求めよ。
- (3) Q が D の $x > 0$ の部分を動くとき、双曲線 D 上の点 Q から、円 C にひいた接線の2つの接点を結ぶ直線が通過しない領域を求め、図示せよ。

[お仕上げ問題]

複素数平面上で, 点 1 と i を結ぶ線分を l とする。ただし, i は虚数単位で, 点 1 と i は l に含まれる。点 z_1 と点 z_2 が l 上を動くとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 点 $z_1 + z_2$ の動く範囲を図示せよ。
- (2) 点 $z_1 z_2$ の動く範囲を図示せよ。

[お仕上げ問題]

四面体 $OABC$ があり, $\angle AOB = \angle AOC = 90^\circ$, $\angle BOC = 60^\circ$, 辺 OA, OB, OC の長さはそれぞれ $a, a, 2$ である。このとき, 点 O から三角形 ABC を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を P とするとき, P が三角形 ABC の内部 (辺上を含む) にあるための a の条件を求めよ。

[お仕上げ問題]

n を自然数とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $|x| + |y| \leq n$ となる2つの整数の組 (x, y) の個数を求めよ。
- (2) $|x| + |y| + |z| \leq n$ となる3つの整数の組 (x, y, z) の個数を求めよ。

【お仕上げ問題】

1個のサイコロを n 回投げる。

- (1) $n \geq 2$ のとき, 1の目が少なくとも1回出て, かつ2の目も少なくとも1回出る確率を求めよ。
- (2) $n \geq 3$ のとき, 1の目が少なくとも2回出て, かつ2の目が少なくとも1回出る確率を求めよ。

[お仕上げ問題]

(1) 座標空間において不等式

$$0 \leq x \leq \cos z \cos 2z, 0 \leq y \leq x \tan z, 0 \leq z \leq \frac{\pi}{4}$$

を満たす点 $P(x, y, z)$ の全体からなる立体 D の体積を求めよ。

(2) 曲線 $C: x^2 - 2xy + 2y^2 = 4$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転して得られる立体の体積を求めよ。

[最後のお仕上げ問題]

n を自然数とし、 $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ とする。

このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ を求めよ。