

なんぷり原稿（全69問）

1 （関数とグラフ, 最大最小 1983東大）

平面上に点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。また, この平面上の O と異なる点 A を通って直線 OA と垂直な空間直線 l があり, 平面とのなす角が 45° である。

このとき, 円 C と直線 l の間の最短距離を, 2点 O, A 間の距離 a で表せ。

2 (関数とグラフ, 最大最小 2008東大4)

放物線 $y = x^2$ 上に2点 P, Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。

- (1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で, h を表せ。
- (2) L を固定したとき, h がとりうる値の最小値を求めよ。

3 (関数とグラフ, 最大最小 2000東大2)

xy 平面内の領域

$$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

において

$$1 - ax - by - axy$$

の最小値が正となるような定数 a, b を座標とする点 (a, b) の範囲を図示せよ。

4 (関数とグラフ, 最大最小 2006東工大3)

平面上を半径 1 の 3 個の円板が下記の条件 (a) と (b) を満たしながら動くとき, これら 3 個の円板の和集合の面積 S の最大値を求めよ。

(a) 3 個の円板の中心はいずれも定点 P を中心とする半径 1 の円周上にある。

(b) 3 個の円板すべてが共有する点 は P のみである。

5 (関数とグラフ, 最大最小 2000横国大3)

実数 t に対して, $0 \leq x \leq 2$ における $\left| x^3 - 3tx^2 - \frac{3}{4} \right|$ の最大値を $f(t)$ とする。

このとき, $f(t)$ を t の式で表し, そのグラフをかけ。

6 (関数とグラフ, 最大最小 1999東北大3)

曲線 $y=x^2$ の点 (a, a^2) での接線を l とする。 l 上の点で x 座標が $a-1$ と $a+1$ のものをそれぞれ P および Q とする。 a が $-1 \leq a \leq 1$ の範囲を動くとき 線分 PQ の動く範囲の面積を求めよ。

7 (関数とグラフ, 最大最小 2015東工大1)

正の実数 a に対して, 座標平面上で次の放物線を考える。

$$C: y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき, C の通過する領域を図示せよ。

8 (関数とグラフ, 最大最小 1998東大2)

パラメータ r, θ $\left(r > 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$ に対して x の関数 $f(x) = r \sin(x + \theta)$ を考える。

(1) r, θ が等式 $\int_0^{2\pi} (\sin x - f(x))^2 dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$ (E) をみたしているとき,

r を θ の関数として表せ。

(2) 式(E)をみたしながら r, θ を動かしたとき, $0 \leq x \leq \pi$ における $y = f(x)$ のグラフは xy 平面上を動く。これらのグラフが動く範囲 D を求め, 図示せよ。

(3) 図形 D の面積を求めよ。

9 (式・方程式・不等式 2016名古屋大1)

曲線 $y=x^2$ 上に2点 $A(-2, 4)$, $B(b, b^2)$ をとる。ただし $b > -2$ とする。

このとき、次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件： $y=x^2$ 上の点 $T(t, t^2)$ ($-2 < t < b$) で、 $\angle ATB$ が直角になるものが存在する。

10 (式・方程式・不等式 1997京大4)

2次関数 $y=(ax+b)^2$ ($0 \leq x \leq 1$) の最大値を $M(a, b)$ とする。このとき、次の不等式(*)が任意の実数 a, b に対して成り立つような実数 m の中で最小のものを求めよ。

$$(*) \quad M(a, b) \leq m \int_0^1 (ax+b)^2 dx$$

11 (図形・軌跡・領域 1997東工大4)

- (1) 底辺の長さが l , 2つの底角が α, β の三角形の面積 S は次式で与えられることを示せ。

$$S = \frac{l^2}{4} \cdot \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

- (2) 各辺の長さが $1, 2, \sqrt{3}$ の三角形の各辺に1点ずつ頂点をもつ正三角形の面積の最小値を求めよ。

12 (図形・軌跡・領域 1998東大1)

xy 平面上の点 $P_1=(0, 10)$ を中心とし半径が 1 の円周 C_1 と, $P_2=(0, 0)$ を中心とし半径が 2 の円周 C_2 を与える。 xy 平面上の 3 点 Q, R, S を頂点とし, 角 $\angle QRS$ が直角になるような直角二等辺三角形 $\triangle QRS$ に関して次の問いに答えよ。

- (1) 点 Q が円周 C_1 上を動き, 点 R が円周 C_2 上を動くとき, 第 3 の頂点 S が動いた軌跡を求めよ。
- (2) さらに, 直線 $x+2y=10$ 上にある点 P_3 を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周 C_3 を与える。点 P_3 を適当にとったところ, 頂点 Q, R, S がそれぞれ円周 C_1, C_2, C_3 上にあり, 角 $\angle QRS$ が直角になるような直角二等辺三角形 $\triangle QRS$ がただ一つだけ定まったという。このときの P_3 の座標を求めよ。

13 (図形・軌跡・領域 2002東大3)

xyz 空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とし, 点 $A(0, 0, -1)$ を通る球面を S とする。
 S の外側にある点 $P(x, y, z)$ に対し, OP を直径とする球面と S との交わりとして得られる円を含む平面を L とする。点 P と点 A から平面 L へ下した垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき,

$$PQ \leq AR$$

であるような点 P の動く範囲 V を求め, V の体積は10より小さいことを示せ。

14 (図形・軌跡・領域 2015大阪市大2)

a, b は実数で $a > 0$ とする。円 $x^2 + y^2 = 1$ と放物線 $y = ax^2 + b$ の共有点の個数を m とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $m = 2$ となるための a, b に関する必要十分条件を求めよ。
- (2) $m = 3$ となるための a, b に関する必要十分条件を求めよ。
- (3) $m = 4$ となるための a, b に関する必要十分条件を求めよ。

15 (図形・軌跡・領域 1997東大4)

正三角形 ABC の頂点 A から辺 AB とのなす角が θ の方向に、三角形の内部に向かって出発した光線を考える。ただし、 $0 < \theta < 60^\circ$ とする。この光線は三角形の各辺で入射角と反射角が等しくなるように反射し、頂点に到達するとそこで止まるものとする。また、三角形の内部では光線は直進するものとする。

(1) $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$ のとき、この光線はどの頂点に到達するかを述べよ。

(2) 正の整数 k を用いて $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{6k+2}$ と表せるとき、この光線の到達する頂点を求め、またそこへ至るまでの反射の回数を k を用いて表せ。

16 (図形・軌跡・領域 2009東工大1)

a が与えられた実数のとき, xyz 空間の点 $C(a, 0, 3)$ から出た光が球

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$$

でさえぎられてできる xy 平面上の影を S とする。

点 $(X, Y, 0)$ が S に含まれる条件を求めよ。

17 (図形・軌跡・領域 1998東大4)

xyz 空間に3点 $A(1, 0, 0)$, $B(-1, 0, 0)$, $C(0, \sqrt{3}, 0)$ をとる。 $\triangle ABC$ を1つの面とし,
 $z \geq 0$ の部分に含まれる正四面体 $ABCD$ をとる。さらに $\triangle ABD$ を1つの面とし, 点 C と
異なる点 E をもう1つの頂点とする正四面体 $ABDE$ をとる。

(1) 点 E の座標を求めよ。

(2) 正四面体 $ABDE$ の $y \leq 0$ の部分の体積を求めよ。

18 (図形・軌跡・領域 1996東大2)

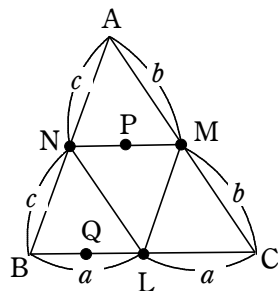
3 辺の長さが $BC=2a$, $CA=2b$, $AB=2c$ であるような鋭角三角形 $\triangle ABC$ の 3 辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N とする。線分 LM, MN, NL に沿って三角形を折り曲げ、四面体をつくる。

その際、線分 BL と CL , CM と AM , AN と BN はそれぞれ同一視されて、長さが a, b, c の辺になるものとする。

(1) 線分 MN, BL の中点をそれぞれ P, Q とする。

四面体を組み立てたとき、空間内の線分 PQ の長さを求めよ。

(2) この四面体の体積を a, b, c を用いて表せ。



19 (図形・軌跡・領域 2013早稲田大5)

空間内に平面 P がある。空間内の図形 A に対し、 A の各点から P に下ろした垂線と P との交点の全体を、 A の P への正射影とよぶ。次の問に答えよ。

- (1) 平面 Q が平面 P と角 θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ で交わっているとする。すなわち、 P と Q の交線

に垂直な平面で P, Q を切ってできる2直線のなす角が θ であるとする。

Q 上の長さ1の線分の P への正射影の長さの最大値と最小値を求めよ。

- (2) (1)の Q を考える。 Q 上の1辺の長さが1である正三角形の P への正射影の面積を求めよ。

- (3) 1辺の長さが1である正四面体 T の P への正射影 T' はどんな形か。

また、 T' の面積の最大値を求めよ。

20 (整数・論理・数列 1991東大5)

xy 平面上, x 座標, y 座標がともに整数であるような点 (m, n) を格子点とよぶ。

各格子点を中心として半径 r の円がえがかれており, 傾き $\frac{2}{5}$ の任意の直線はこれらの円のどれかと共有点をもつという。このような性質をもつ実数 r の最小値を求めよ。

21 (整数・論理・数列 2005東大4)

3 以上 9999 以下の奇数 a で、 $a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

22 (整数・論理・数列 2016一橋大1)

$6 \cdot 3^{3x} \div 1 = 7 \cdot 5^{2x}$ を満たす 0 以上の整数 x をすべて求めよ。

23 (整数・論理・数列 1997京大2)

n が相異なる素数 p, q の積, $n = pq$ であるとき, $(n-1)$ 個の数 ${}_nC_k (1 \leq k \leq n-1)$ の最大公約数は1であることを示せ。

24 (整数・論理・数列 1998東大2)

n を正の整数とする。連立不等式

$$\begin{cases} x + y + z \leq n \\ -x + y - z \leq n \\ x - y - z \leq n \\ -x - y + z \leq n \end{cases}$$

をみたす xyz 空間の点 $P(x, y, z)$ で、 x, y, z がすべて整数であるものの個数を $f(n)$ とおく。

極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3}$$

を求めよ。

25 (整数・論理・数列 2003東工大2)

m を0以上の整数とする。直線 $2x + 3y = m$ 上の点 (x, y) で、 x, y がともに0以上の整数であるものの個数を $N(m)$ とする。

(1) $N(m+6) = N(m) + 1$ を証明せよ。

(2) $N(m) = 1 - m + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2m}{3} \right\rfloor$ を証明せよ。

ただし、 $[a]$ は a 以下の最大の整数を表すものとする。

26 (整数・論理・数列 2007東大1)

n と k を正の整数とし、 $P(x)$ を次数が n 以上の整式とする。整式 $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば、 $P(x)$ の n 次以下の項の係数は、すべて整数であることを示せ。ただし、定数項については、項それ自身を係数とみなす。

27 (整数・論理・数列 2003東大4)

2次方程式 $x^2 - 4x - 1 = 0$ の2つの実数解のうち大きいものを α , 小さいものを β とする。

$n = 1, 2, 3 \dots$ に対し,

$$S_n = \alpha^n + \beta^n$$

とおく。

(1) S_1, S_2, S_3 を求めよ。また, $n \geq 3$ に対し, S_n を S_{n-1} と S_{n-2} で表せ。

(2) β^3 以下の最大の整数を求めよ。

(3) α^{2003} 以下の最大の整数の1の位の数を求めよ。

28 (整数・論理・数列 2002東大6)

N を正の整数とする。 $2N$ 個の項からなる数列

$$\{a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N\}$$

を

$$\{b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_N, a_N\}$$

という数列に並べ替える操作を「シャッフル」と呼ぶことにする。並べ替えた数列は b_1 を初項とし、 b_i の次に a_i 、 a_i の次に b_{i+1} が来るようなものになる。また、数列 $\{1, 2, \dots, 2N\}$ をシャッフルしたときに得られる数列において、数 k が現れる位置を $f(k)$ で表す。

たとえば、 $N=3$ のとき、 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ をシャッフルすると $\{4, 1, 5, 2, 6, 3\}$ となるので、 $f(1)=2$ 、 $f(2)=4$ 、 $f(3)=6$ 、 $f(4)=1$ 、 $f(5)=3$ 、 $f(6)=5$ である。

- (1) 数列 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ を3回シャッフルしたときに得られる数列を求めよ。
- (2) $1 \leq k \leq 2N$ を満たす任意の整数 k に対し、 $f(k) - 2k$ は $2N+1$ で割り切れることを示せ。
- (3) n を正の整数とし、 $N=2^{n-1}$ のときを考える。数列 $\{1, 2, 3, \dots, 2N\}$ を $2n$ 回シャッフルすると、 $\{1, 2, 3, \dots, 2N\}$ にもどることを証明せよ。

29 (整数・論理・数列 1993一橋大)

原点 $(0, 0)$ を中心とする半径1 の円 O の周上に定点 $A(1, 0)$ と動点 P をとる。

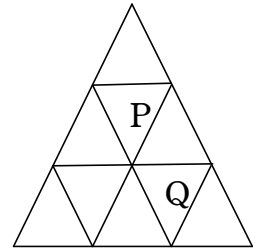
- (1) 円 O の周上の点 B, C で $PA^2 + PB^2 + PC^2$ が P の位置によらず一定であるものを求めよ。
- (2) 点 B, C が (1) の条件を満たすとき, $PA + PB + PC$ の最大値と最小値を求めよ。

30 (場合の数・確率 2012東大2)

図のように、正三角形を9つの部屋に辺で区切り、部屋P、Qを定める。

1つの球が部屋Pを出発し、1秒ごとに、そのままその部屋にとどまることなく、
辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。

球が n 秒後に部屋Qにある確率を求めよ。



31 (場合の数・確率 2008東大2)

白黒 2種類のカードがたくさんある。そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき、次の操作 (A) を考える。

(A) 手持ちの k 枚の中から1枚を、等確率 $\frac{1}{k}$ で選び出し、それを違う色のカードにとりかえる。

以下の問 (1), (2) に答えよ。

(1) 最初に白2枚、黒2枚、合計4枚のカードをもっているとき、

操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて、4枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2) 最初に白3枚、黒3枚、合計6枚のカードをもっているとき、

操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて、6枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

32 (場合の数・確率 2000一橋大5)

1 個のサイコロを n 回投げる。

- (1) $n \geq 2$ のとき, 1 の目が少なくとも1回出て, かつ 2 の目も少なくとも1回出る確率を求めよ。
- (2) $n \geq 3$ のとき, 1 の目が少なくとも2回出て, かつ 2 の目が少なくとも1回出る確率を求めよ。

33 (場合の数・確率 1996早稲田大3)

A と B の二人が以下のゲームを行なう。

表の出る確率が p ($0 < p < 1$)、裏の出る確率が $q = 1 - p$ のコインを続けて投げる。
一回投げるごとに、表が出れば A が1点を、裏が出れば B が1点を得るものとする。

0対0から始めて、先に2点多く得た方が勝ちとする。

A, B の得点が i 対 j の時点で A が勝つ確率を $K(i, j)$ とする。

たとえば、 $K(3, 1) = 1$, $K(1, 3) = 0$ である。次の各問に答えよ。

(1) $|i - j| \leq 1$ のとき、 $K(i, j)$ を $K(i, j+1)$ と $K(i+1, j)$ を用いて表わせ。

(2) $K(1, 1)$ を求めよ。

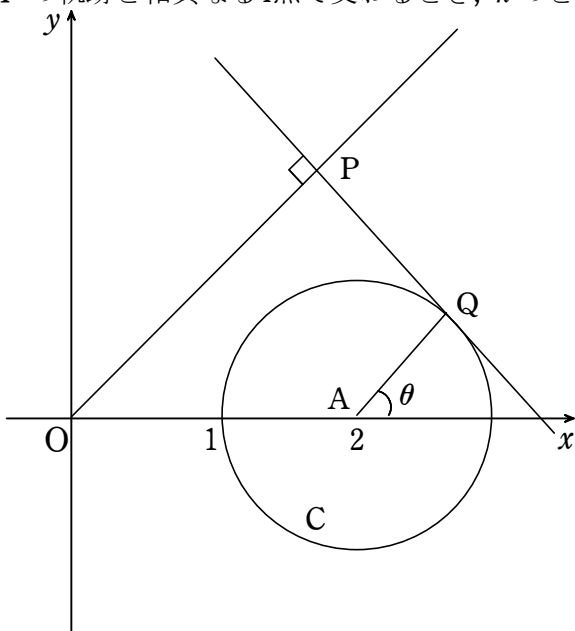
(3) $a = \frac{p}{q}$ とおくとき、 $K(0, 1)$ を a を用いて表わせ。

(4) (3)において、 $K(0, 1) > \frac{1}{2}$ をみたす a の値のうち最小の自然数を求めよ。

34 (極座標 1999筑波大5)

xy 平面上において、点 $A(2, 0)$ を中心とする半径1の円を C とする。 C 上の点 Q における C の接線に原点 $O(0, 0)$ から下した垂線の足を P とする。図のように x 軸と線分 AQ のなす角を θ とする。ただし、 θ は $-\pi < \theta \leq \pi$ を動くものとする。

- (1) 点 $P(x, y)$ の座標 (x, y) を θ を用いて表わせ。
- (2) 点 $P(x, y)$ の x 座標が最小となるとき、 P の座標 (x, y) を求めよ。
- (3) 直線 $x = k$ が点 P の軌跡と相異なる4点で交わるとき、 k のとりうる値の範囲を求めよ。



35 (極座標 1997電通大)

曲線 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 上の動点を P とし、原点 O からこの曲線の P における接線に下ろした垂線を OQ とする。点 Q の軌跡を C として、次の問いに答えよ。

- (1) 動点 P の x 座標を a とし、 OQ の長さを r 、 x 軸の正の向きから OQ へ測った角の大きさを θ とするとき、 r および $\tan \theta$ を a で表せ。
- (2) C の極方程式を求めよ。
- (3) C 上で x 座標が最大となる点の極座標を求めよ。
- (4) 曲線 C に原点 O をつけ加えたものを C' とする。 C' が囲む部分の面積を求めよ。

36 (媒介変数表示の曲線 1997京大6)

媒介変数表示された曲線 $C: x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$ を考える。

- (1) C の長さ L を求めよ。
- (2) C と x 軸, y 軸で囲まれた領域の面積 S を求めよ。

37 (媒介変数表示の曲線 2016横浜国大4)

O を原点とする xy 平面上に曲線 $C: x = \cos^3 t, y = \sin^3 t \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ がある。

C 上の3点 $A(1, 0), B(0, 1), Q(\cos^3 \theta, \sin^3 \theta) \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ を考える。

動点 P は A を出発し、 C 上を B に向かって Q まで速さ $\sqrt{3}$ で進み、 Q から線分 QO 上を O まで速さ1で進む。次の問いに答えよ。

(1) 動点 P が A を出発し O に到達するまでの所要時間 $T(\theta)$ を求めよ。

(2) $T(\theta)$ の最小値を求めよ。

38 (複素数平面 2002北大4)

n を3以上の自然数とするとき、次を示せ。

ただし、 $\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ とし、 i を虚数単位とする。

$$(1) \alpha^k + \overline{\alpha}^k = 2 \cos \frac{2\pi k}{n}$$

ただし、 k は自然数とし、 $\overline{\alpha}$ は α に共役な複素数とする。

$$(2) n = (1 - \alpha)(1 - \alpha^2) \cdots (1 - \alpha^{n-1})$$

$$(3) \frac{n}{2^{n-1}} = \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{n-1}{n} \pi$$

39 (複素数平面 2000東大2)

複素数平面上の原点以外の相異なる2点 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ を考える。 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ を通る直線を l , 原点から l に引いた垂線と l の交点を $R(w)$ とする。ただし, 複素数 γ が表す点 C を $C(\gamma)$ とかく。このとき,

「 $w = \alpha\beta$ であるための必要十分条件は, $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ が中心 $A\left(\frac{1}{2}\right)$,

半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にあることである。」

を示せ。

40 (複素数平面 2000京大1)

α, β, γ は互いに異なる複素数とする。

- (1) 複素数平面上で $\frac{z-\beta}{z-\alpha}$ の虚数部分が正となる z の存在する範囲を図示せよ。
- (2) 複素数 z が $(z-\alpha)(z-\beta)+(z-\beta)(z-\gamma)+(z-\gamma)(z-\alpha)=0$ を満たしているとき、
 z は α, β, γ を頂点とする三角形の内部に存在することを示せ。
ただし、 α, β, γ は同一直線上にはないものとする。

41 (複素数平面 2001東大4)

複素数平面上の点 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ を

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = i, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

により定め

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおく。ただし、 i は虚数単位である。

(1) 3点 b_1, b_2, b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ。

(2) すべての点 $b_n (n = 1, 2, \dots)$ は円 C の周上にあることを示せ。

42 (複素数平面 2003東大2)

O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A , $7+7i$ を表す点を B とする。

ただし, i は虚数単位である。正の実数 t に対し,

$$\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$$

を表す点 P をとる。

(1) $\angle APB$ を求めよ。

(2) 線分 OP の長さが最大になる t を求めよ。

43 (複素数平面 2000横浜国大4)

複素数平面上で、点 1 と点 i を結ぶ線分を l とする。ただし、 i は虚数単位である。
点 z_1 と点 z_2 が l 上を動くとき、次の問いに答えよ。

- (1) l を図示せよ。 (2) 点 $z_1 + z_2$ の動く範囲を図示せよ。
(3) 点 $z_1 z_2$ の動く範囲を図示せよ。

44 (複素数平面 1997一橋大5)

複素数平面上に 0 と異なる3点 z_1, z_2, z_3 があり, 条件(ア),(イ),(ウ)をみたしている。

(ア) $\arg z_1 = \arg z_2 + 120^\circ$

(イ) 点 z_3 は, 2点 z_1, z_2 を通る直線に関して 0 と反対側にある。

(ウ) $\triangle z_1 z_2 z_3$ は正三角形である。

このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ とするとき,

$$\alpha z_1 = p z_1 + q z_2$$

$$\alpha z_2 = s z_1 + t z_2$$

となる実数 p, q, s, t をそれぞれ $|z_1|, |z_2|$ を用いて表せ。

(2) $z_3 = a z_1 + b z_2$ となる実数 a, b をそれぞれ, $|z_1|, |z_2|$ を用いて表せ。

45 (極限 1999東北大5)

正 n 角形 P_n を次のようにして定義する。

(i) P_3 は面積が 1 の正三角形である。

(ii) P_n と同じ面積をもつ円を D_n とする。 P_{n+1} は D_n と周の長さが等しい 正 $(n+1)$ 角形である。

$n = 3, 4, 5, \dots$ について P_n の面積を a_n としたとき 次の各問いに答えよ。

(1) $n \geq 4$ について $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ を n を用いて表せ。

(2) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n} \right)$ を求めよ。

46 (極限 2007東大2)

n を 2 以上の整数とする。平面上に $(n+2)$ 個の点 O, P_0, P_1, \dots, P_n があり, 次の 2 つの条件をみたしている。

① $\angle P_{k-1}OP_k = \frac{\pi}{n} \ (1 \leq k \leq n), \ \angle OP_{k-1}P_k = \angle OP_0P_1 \ (2 \leq k \leq n)$

② 線分 OP_0 の長さは 1, 線分 OP_1 の長さは $1 + \frac{1}{n}$ である。

線分 $P_{k-1}P_k$ の長さを a_k とし, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおくとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

47 (極限 1998京大4)

a, m は自然数で a は定数とする。 xy 平面上の点 (a, m) を頂点とし、原点と点 $(2a, 0)$ を通る放物線を考える。この放物線と x 軸で囲まれる領域の面積を S_m 、この領域の内部および境界線上にある格子点の数を L_m とする。このとき極限值

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L_m}{S_m}$$

を求めよ。ただし xy 平面上の格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数となる点のことである。

48 (極限 1988東大4)

xy 平面上で原点から傾き a ($a > 0$) で出発し折れ線状に動く点 P を考える。

ただし、点 P の y 座標はつねに増加し、その値が整数になるごとに動く方向の傾きが s 倍 ($s > 0$) に変化するものとする。

P の描く折れ線が直線 $x = b$ ($b > 0$) を横切るための a, b, s に関する条件を求めよ。

49 (極限 1999東理大理工1(3))

1つのサイコロを n 回続けて投げて、出た目の数を順に a_1, a_2, \dots, a_n とするとき、

$$\frac{a_1}{7} + \frac{a_2}{7^2} + \dots + \frac{a_n}{7^n} > \frac{1}{2}$$

となる確率を P_n とおく。

$$P_1 = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}, \quad P_2 = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}} \quad \boxed{\text{ヌ}}}$$

である。また $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ となる。

50 (極限 1997東工大2)

(1) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ を求めよ。

(2) 任意の正数 a に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{a+k}$$

は(1)と同じ極限值をもつことを証明せよ。

51 (数Ⅲ微分法 2003慶大A4)

k を正の実数とする。 $x > \frac{1}{4}$ で定義された関数

$$f(x) = \frac{k}{4x-1} - \frac{1}{x^2}$$

について、次の問いに答えなさい。

(1) 不等式 $f'(x) < 0$ を k について解き、その解を $k > g(x)$ とする。この $g(x)$ は

$x = \boxed{\text{(ツ)}}$ で最大値 $m = \boxed{\text{(テ)}}$ をとる。したがって、 $k > m$ のとき $f(x)$ は単調に減少する。

(2) $k < m$ のとき、 $f(x)$ は単調に減少する部分と単調に増加する部分を含む。

$f(x)$ が極小値 0 をとるのは $x = \boxed{\text{(ト)}}$, $k = \boxed{\text{(ナ)}}$ のときである。

$k = \boxed{\text{(ナ)}}$ のとき、 $f(x)$ は $x = \boxed{\text{(ニ)}}$ で極大値をとる。

(3) $k < \boxed{\text{(ナ)}}$ のとき、領域 $\{(x, y) \mid f(x) \leq y \leq 0\}$ の面積を $S(k)$ とおくと、

$$\lim_{k \rightarrow 0} S(k) = \boxed{\text{(ヌ)}}$$

である。

52 (数Ⅲ微分法 1997大阪大4)

a は実数とする。曲線 $y=e^x$ 上の各点における法線のうちで、点 $P(a, 3)$ を通るものの個数を $n(a)$ とする。 $n(a)$ を求めよ。

53 (数Ⅲ微分法 2006筑波大2)

$a \geq b > 0, x \geq 0$ とし, n は自然数とする。次の不等式を示せ。

$$(1) \quad 0 \leq e^x - (1+x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$$

$$(2) \quad a^n - b^n \leq n(a-b)a^{n-1}$$

$$(3) \quad e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{x^2 e^x}{2n}$$

54 (数Ⅲ微分法 1993京大4)

a は正の定数とする。不等式 $a^x \geq ax$ がすべての正の数 x に対して成り立つという。
このとき a はどのようなものか。

55 (数Ⅲ微分法 1997滋賀県立大)

$0 \leq x \leq 1$ とする。

(1) $0 \leq e^x - (1+x) \leq x$ であることを示せ。

(2) 任意の正の整数 n に対して,

$$0 \leq e^x - \left(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n\right) \leq \frac{1}{n!}x^n$$

が成り立つことを示せ。

(3) $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k = e^x$ が成り立つことを示せ。

56 (数Ⅲ積分法 1993東工大2)

n を自然数とする。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ を求めよ。

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}$ を示せ。

57 (数Ⅲ積分法 2006東工大1)

以下の問に答えよ。

(1) 自然数 n に対し $I(n) = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} |\sin x| dx$ を求めよ。

(2) 次の不等式を示せ。

$$0 \leq \int_0^{\frac{s\pi}{2}} \cos x \, dx - s \leq \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)s \quad (0 \leq s \leq 1)$$

(3) a を正の数とし、 a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。 $[a]$ が奇数のとき次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin at| \, dt - 1 \leq \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{[a]}{a}\right)$$

58 (数Ⅲ積分法 1998京大2)

関数 $f_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) は, $f_1(x)=4x^2+1$

$$f_n(x)=\int_0^1(3x^2tf_{n-1}'(t)+3f_{n-1}(t))dt \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

で, 帰納的に定義されている。この $f_n(x)$ を求めよ。

59 (数Ⅲ積分法 1991東工大4)

関数 $f(x)=x^3+ax^2+(b-a-1)x$ について次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ が $x \geq 0$ で増加するような点 (a, b) の範囲 G を図示せよ。

(2) $y \geq 0$ における $y=f(x)$ の逆関数を $x=f^{-1}(y)$ ($x \geq 0$) とする。

点 (a, b) が G を動くとき、定積分 $\int_0^b f^{-1}(y) dy$ の最小値を求めよ。

60 (数Ⅲ積分法 2015東京学芸大2)

n を2以上の整数とする。曲線 $y = \sin x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$, 直線 $x = \frac{\pi}{2}$ および x 軸で囲まれる部分の面積を $n-1$ 本の曲線 $y = a_k \cos x \ (k=1, 2, \dots, n-1)$ によって n 等分するとき, 下の問いに答えよ。ただし, $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1}$ とする。

(1) $n=2$ のとき, a_1 の値を求めよ。

(2) a_k を n と k で表せ。

61 (数Ⅲ積分法 2000早稲田大4)

$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲の媒介変数 t によって

$$\begin{cases} x = (1 + \sin t) \cos t \\ y = (1 - \sin t) \cos t \end{cases}$$

と表される xy 平面上の曲線 C を考える。このとき、次の問いに答えよ。

(1) C はある一つの直線に関して対称な形をしている。その直線を求めよ。

(2) $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\frac{dy}{dx} = 0$ となる点の座標を求めよ。

(3) $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(4) C によって囲まれる図形の面積を求めよ。

62 (数Ⅲ積分法 2002東工大4)

n を自然数とする。

(1) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$$

(2) 関数 $y = x(x-1)(x-2) \cdots (x-n)$ の極値を与える x の最小値を x_n とする。このとき

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{2-x_n} + \cdots + \frac{1}{n-x_n}$$

および $0 < x_n \leq \frac{1}{2}$ を示せ。

(3) (2) の x_n に対して、極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \log n$$

を求めよ。

63 (数Ⅲ積分法 2007東大6)

以下の問いに答えよ。

- (1) $0 < x < a$ をみたす実数 x, a に対し, 次を示せ。

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < x \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$$

- (2) (1) を利用して, 次を示せ。

$$0.68 < \log 2 < 0.71$$

ただし, $\log 2$ は 2 の自然対数を表す。

64 (数Ⅲ積分法 2004慶大A1)

底面の半径が a で高さが b の直円柱 A を考える。この直円柱 A を座標空間内の2つの平面 $z=0$ と $z=b$ との間に、その中心軸が z 軸と重なるようにおく。また x 軸と点 $(0, a, b)$ を含む平面を P とする。平面 P で、この直円柱 A を切ってできる2つの立体のうちで、点 $\left(0, \frac{a}{2}, \frac{b}{4}\right)$ を含む方の立体を B とする。 t を条件 $0 \leq t \leq a$ をみたす実数とすると、この立体 B を平面 $y=t$ で切ったときの切り口の面積 $S(t)$ は $\boxed{\text{(ア)}}$ である。

したがって、立体 B の体積 $V = \int_0^a S(t) dt$ は $\boxed{\text{(イ)}}$ となる。

さらに、この立体 B の側面(つまり、もともとは直円柱 A の側面であった部分)の面積 S_1 は $\boxed{\text{(ウ)}}$ である。立体 B の底面(すなわち、平面 $z=0$ の部分)の面積を S_2 とする。

ここで、 $S_1 + S_2 = 3\pi$ (π は円周率) の条件のもとで、 a と b を動かして立体 B の体積 V を最大にするには、 $a = \boxed{\text{(エ)}}$, $b = \boxed{\text{(オ)}}$ と定めればよい。

65 (数Ⅲ積分法 1993東工大)

一辺の長さが 1 の立方体を、中心を通る対角線のうちの一本を軸として回転させたとき、この立方体が通過する部分の体積を求めよ。

66 (数Ⅲ積分法 2009東大4)

a を正の実数とし, 空間内の2つの円板

$$D_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = a\}$$

$$D_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = -a\}$$

を考える。 D_1 を y 軸の回りに 180° 回転して D_2 に重ねる。ただし回転は z 軸の正の部分
を x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。

E の体積を $V(a)$ とし, E と $\{(x, y, z) \mid x \geq 0\}$ との共通部分の体積を $W(a)$ とする。

(1) $W(a)$ を求めよ。

(2) $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$ を求めよ。

67 (数Ⅲ積分法 1999大阪大4)

xyz 空間内に2つの立体 K と L がある。どのような a に対しても、平面 $z=a$ による立体 K の切り口は3点 $(0, 0, a)$, $(1, 0, a)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, a\right)$ を頂点とする正三角形である。

また、どのような a に対しても、平面 $y=a$ による立体 L の切り口は3点 $(0, a, 0)$,

$\left(0, a, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(1, a, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を頂点とする正三角形である。

このとき、立体 K と L の共通部分の体積を求めよ。

68 (数Ⅲ積分法 2003東大3)

xyz 空間において、平面 $z=0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし、点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を A とする。

次に、平面 $z=0$ 上の点 $(1, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の円を H 、平面 $z=1$ 上の点 $(1, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする。 H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする。

円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする。

$0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対し、平面 $z=t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく。

(1) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。 $t = 1 - \cos \theta$ のとき、 $S(t)$ を θ で表せ。

(2) C の体積 $\int_0^1 S(t) dt$ を求めよ。

69 (数Ⅲ積分法 2003早稲田大4)

空間内の6点 $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$ を頂点とする正八面体 T と、原点 O を中心とし、 O から T の辺の中点までの距離を半径とする球 S を考える。

T と S との共通部分を A , T のうち S に含まれない部分を B , S のうち T に含まれない部分を C とする。 A, B, C の体積をそれぞれ a, b, c で表すとき、以下の問いに答えよ。

- (1) b と c の大小を比較せよ。
- (2) a, b, c の大小を比較し、大きい順に並べよ。