

[入試演習 9]

$t < 3$ ,  $t \neq 1$  である  $t$  に対応して,  $\frac{x^2}{3-t} + \frac{y^2}{1-t} = 1$  によって表される  $xy$  平面上の曲線  $C_t$

を考える。 $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  として平面上の定点  $A(a, b)$  をとる。

- (1)  $C_t$  が点  $A$  を通るような  $t$  は2つあることを証明せよ。
- (2) 上の2つの  $t$  を  $t_1, t_2$  とするとき, 曲線  $C_{t_1}, C_{t_2}$  の点のうち1つは楕円で他の1つは双曲線であることを証明せよ。
- (3) (2)の2曲線  $C_{t_1}, C_{t_2}$  の点  $A$  における2つの接線は直交することを証明せよ。

(大阪医科大)

(1)  $C_t: \frac{x^2}{3-t} + \frac{y^2}{1-t} = 1$  が  $A(a, b)$  を通るとき

代入して整理すると

$$t^2 + (a^2 + b^2 - 4)t - (a^2 + 3b^2 - 3) = 0 \dots \textcircled{1}$$

判別式を  $D$  とすると,

$$\begin{aligned} D &= (a^2 + b^2 - 4)^2 + 4(a^2 + 3b^2 - 3) \\ &= a^4 + 2(b^2 - 2)a^2 + b^4 + 4b^2 + 4 \\ &= (a^2 + b^2 - 2)^2 + 4b^2 > 0 \quad (\because a \neq 0, b \neq 0) \end{aligned}$$

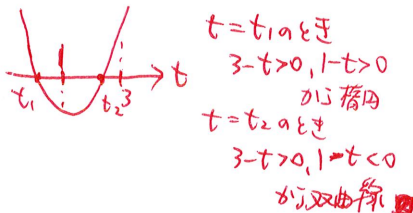
よって2つある。

- (2) ①をみたす2つの解が  $t_1, t_2$  であり,  
 $t_1 < t_2$  として一般性を失わない。

( $t_1 < 1 < t_2 < 3$  を示したい)

①の左辺を  $f(t)$  とおくと

$$f(1) = -2b^2 < 0, f(3) = 2a^2 > 0$$



- (3) 交点  $A(a, b)$  における2つの接線は

$$\begin{cases} \frac{ax}{3-t_1} + \frac{by}{1-t_1} = 1 \\ \frac{ax}{3-t_2} + \frac{by}{1-t_2} = 1 \end{cases}$$

傾きを  $m_1, m_2$  とすると

$$\begin{cases} m_1 = -\frac{a(1-t_1)}{b(3-t_1)} \\ m_2 = -\frac{a(1-t_2)}{b(3-t_2)} \end{cases}$$

したがって,

$$\begin{aligned} m_1 m_2 &= \frac{a^2(1-t_1)(1-t_2)}{b^2(3-t_1)(3-t_2)} \\ &= \frac{a^2 \times f(1)}{b^2 \times f(3)} \\ &= \frac{a^2 \times (-2b^2)}{b^2 \times 2a^2} = -1 \quad \square \end{aligned}$$

楕円に於いては  $\begin{cases} a^2 = 3-t \\ b^2 = 1-t \end{cases} \therefore c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2}$

双曲線に於いては  $\begin{cases} a^2 = 3-t \\ b^2 = t-1 \end{cases} \therefore c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$

## [入試演習 10]

底面の半径2、高さ4の円錐形の内面をもつ容器を考える。

底面を上にして容器を垂直に立てて水を満たしたとき、

水の体積は  $\frac{\text{ }}{\text{ }} \pi$  になる。底面の一つの直径をAB、

円錐の頂点をOとしたとき、OBが鉛直となるように静かに傾けた。

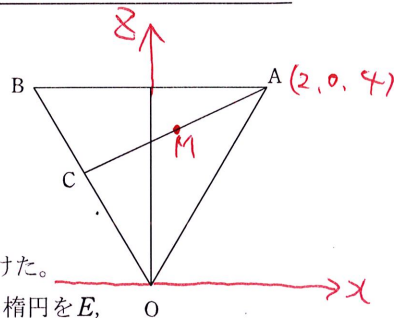
このとき残る水の量を求めたい。傾けたときに水面の縁となる楕円をE、

OBと楕円Eの交点をCとする。

初めの位置で、頂点Oを原点、頂点を含み底面に平行な平面をxy平面、Oを通る鉛直線を

上向きにz軸、BAに平行な直線をx軸とし、Aのx座標が正となるように座標系を定める。

以下、この座標系で考える。



容器内面の円錐の方程式は  $x^2 + y^2 = \frac{\text{ }}{\text{ }} z^2$  となる。また、Aの座標は

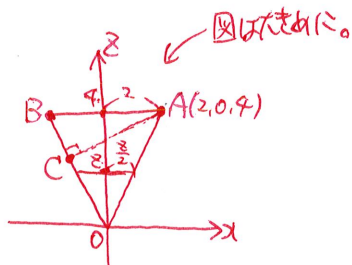
$(\text{ }, 0, \text{ })$ , Cの座標は  $(\frac{\text{ }}{\text{ }}, 0, \frac{\text{ }}{\text{ }})$ , 楕円E上の点は  $z = \frac{\text{ }}{\text{ }} x$

+  $\frac{\text{ }}{\text{ }}$  を満たす。楕円Eの長軸の長さは  $\frac{\text{ }}{\text{ }}$ ,

短軸の長さは  $\frac{\text{ }}{\text{ }}$ , OCは  $\frac{\text{ }}{\text{ }}$  となる。

したがって、残る水の量は  $\frac{\text{ }}{\text{ }} \pi$  である。

(順天堂大一医)



水の体積は  $\frac{1}{3} \times (\pi \times 2^2) \times 4 = \frac{16}{3} \pi$

円錐の方程式は  $x^2 + y^2 = (\frac{z}{2})^2 = \frac{1}{4} z^2$

A(2, 0, 4), C(-\frac{2}{3}, 0, \frac{4}{3})

直線  $z = -2x$ ,  $z = \frac{1}{2}(x+2) + 4$  代入して  
 $-2x = \frac{1}{2}x + 2 \therefore x = -\frac{6}{5}$

よって C(-\frac{6}{5}, 0, \frac{4}{5}), E上の点は  $z = \frac{1}{2}x + 3$

次に、長軸の長さはACの長さより  $\sqrt{(2+\frac{6}{5})^2 + (4-\frac{4}{5})^2} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$   
 ACの中点 M(\frac{2}{5}, 0, \frac{16}{5})  
 これを  $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4}$  に代入して  $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$   
 (したがって短軸の長さは  $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ )

また、OC =  $\sqrt{(-\frac{6}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

残る水の量は  $\frac{1}{3} \times (\pi \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}) \times \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{16\sqrt{5}}{25}$

## [演習-1]

式  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$  で表される楕円をFとする。

(1) 座標平面上の点A(1, 2)を通る、傾きkの直線は

$$y = k(x - \boxed{\phantom{00}}) + \boxed{\phantom{00}}$$

と表せる。この直線が楕円Fに接するとき、接線の傾きkに対し、次式が成り立つ。

$$k^2 + \boxed{\phantom{00}}k - \boxed{\phantom{00}} = 0$$

点Aから楕円Fに引いた2つの接線のなす角は  $\frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}} \pi$  である。

これらの接線と楕円Fの接点をB, Cとし、 $\angle BAC$ の二等分線の傾きを $\tan \alpha$ とすると、

$$\tan 2\alpha = \boxed{\phantom{00}} \text{ が成り立つ。}$$

(2) 楕円Fの外部にある点PからFに引いた2つの接線の接点をQ, Rとする。 $\angle QPR$ の

二等分線の傾きが1であるとき、点Pは  $\boxed{\phantom{00}}x^2 + y^{\boxed{\phantom{00}}} = 1$  で表される  $\boxed{*}$  上

にある。(※には以下の①～⑤のうちからあてはまるものを1つ選べ。)

① 直線    ② 円周    ③ 楕円    ④ 双曲線    ⑤ 放物線    (杏林大一医)

(1) A(1, 2)を通る傾きkの直線は

$$y = k(x-1) + 2 //$$

これをFの式に代入して、

$$\frac{x^2}{2} + \frac{\{k(x-1)+2\}^2}{3} = 1 //$$

$$\Leftrightarrow (3k^2+3)x^2 - (4k^2-8k)x + 2k^2-4k+2=0 //$$

判別式をDとするとD=0より  $k = -2 \pm \sqrt{5} //$

∴ αとき、 $(-2+\sqrt{5})/(-2-\sqrt{5}) = -1$  より  $\frac{\pi}{5} //$

また、 $\tan \beta = -2 + \sqrt{5}$  とすると

$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{4} \text{ より}$$

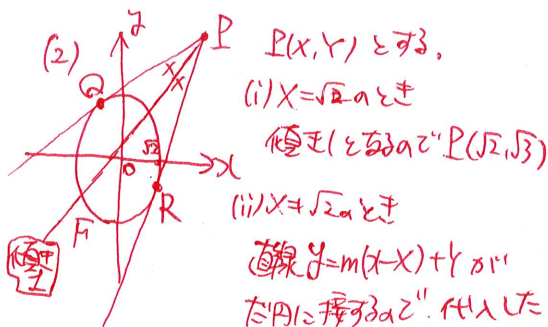
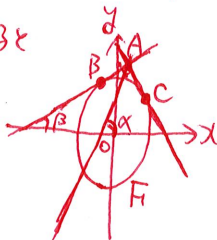
$$\tan 2\alpha = \tan 2(\beta + \frac{\pi}{4}) //$$

$$= \tan(2\beta + \frac{\pi}{2}) //$$

$$= -\frac{1}{\tan 2\beta} //$$

$$= -\frac{1 - \tan^2 \beta}{2 \tan \beta} //$$

$$= -2 //$$



$$(3k^2+3)x^2 + 4m(y-mx)x + 2(y-mx)^2 - 6 = 0 //$$

の判別式'=0 より

$$\{2m(y-mx)\}^2 - (3m^2+3)\{2(y-mx)^2 - 6\} = 0 //$$

$$\therefore (x^2-2)m^2 - 2xym + y^2 - 3 = 0 //$$

2つの解を  $m_1, m_2$  とすると  $m_1 m_2 = \frac{y^2-3}{x^2-2} \dots \textcircled{1}$

$m_1 < m_2$  とすれば、 $m_1 = \tan(\frac{\pi}{4} - \theta)$ ,  $m_2 = \tan(\frac{\pi}{4} + \theta)$

( $\angle QPR = 2\theta$  とすると)

$$\textcircled{1} \text{ に代入して } \tan(\frac{\pi}{4} - \theta) \times \tan(\frac{\pi}{4} + \theta) = \frac{y^2-3}{x^2-2} //$$

$$\therefore -x^2 + y^2 = 1 //$$

(1) の場合より

$$-x^2 + y^2 = 1 //$$

④

[演習 - 2]

座標平面の原点  $O(0, 0)$  を通る楕円  $C_1: 4x^2 + 9(y-3)^2 = 81$  を考える。

- (1) 放物線  $C_2: y = ax^2 (a > 0)$  と楕円  $C_1$  の共有点が原点  $O$  のみであるような  $a$  の最大値

を  $a_1$  とすれば  $a_1 = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}}$  である。

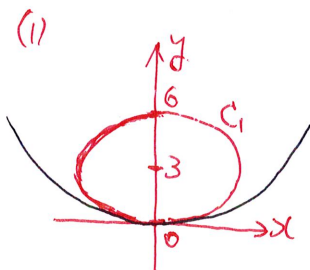
- (2) 円  $C_3: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$  と楕円  $C_1$  が共有点をもつような  $r$  の最大値を  $r_1$  とすれば

$r_1 = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}} \sqrt{\frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}}}$  である。

(東京医科大)

$$C_1: 4x^2 + 9(y-3)^2 = 81$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{(\frac{9}{2})^2} + \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1$$



$$C_2: y = ax^2 (a > 0)$$

$$\text{代入 } 4 \cdot \frac{y}{a} + 9(y-3)^2 = 81$$

$$\Leftrightarrow 9y^2 - 2(27 - \frac{2}{a})y = 0$$

$$\Leftrightarrow 9y \{ y - \frac{2}{9}(27 - \frac{2}{a}) \} = 0$$

$$\text{原点のみ共通のとき } \frac{2}{9}(27 - \frac{2}{a}) \leq 0$$

(正の解はもたない)

$$27 \leq \frac{2}{a} \text{ より } a \leq \frac{2}{27}$$

$$\text{したがって } a_1 = \frac{2}{27}$$

(別解)  $y$  を消去して

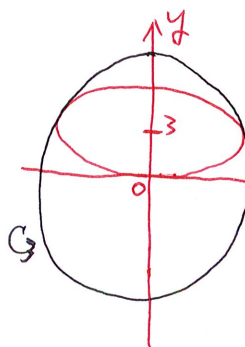
$$x^2(9ax^2 - 54a + 4) = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ または } 9ax^2 - 54a + 4 = 0$$

これが定数解をもたないか。

$$x=0 \text{ を重解にもつ。 } \begin{cases} a < \frac{2}{27} \\ a = \frac{2}{27} \text{ とき} \end{cases}$$

$$(2) C_3: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0) \text{ について}$$



$$(r^2 = x^2 + y^2)$$

$$x^2 = r^2 - y^2 \text{ を } C_1 \text{ に代入}$$

$$4(r^2 - y^2) + 9(y-3)^2 = 81$$

これが正の解をもたない。

$$5y^2 - 54y + 4r^2 = 0$$

$$D_4 = 27^2 - 5 \cdot 4r^2 \geq 0$$

$$r = \frac{27\sqrt{5}}{10}$$

正の解 (重解あり)

$$f(0) > 0 \text{ も } 0 < r \leq \frac{27\sqrt{5}}{10}$$



## [演習-3]

楕円  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$  について以下の設問に答えよ。

(1) 原点Oを極として、この楕円の極方程式を求めよ。

(2) 楕円上の2点AとBが  $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$  であるように動くとき、 $M = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$  の値を求めよ。

(3) 4点P, Q, R, Sがこの順で楕円上に時計回りに並んでいて、線分PRと線分QSは原点Oを交点として直交する。原点Oを極とする点Pの極座標を  $(r, \theta)$  とし、 $L = OP^2 + OQ^2 + OR^2 + OS^2$  とするとき、 $L$  を  $\theta$  の式で表せ。さらに、 $L$  の最大値と最小値およびそれらをあたえる  $\theta$  の値を求めよ、ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  とせよ。

(岩手医科大)

$$(1) \frac{r^2 \cos^2 \theta}{3} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2} = 1 \quad \therefore r^2 \left( \frac{\cos^2 \theta}{3} + \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) = 1 //$$

$$(2) (1)より \frac{1}{OA^2} = \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \theta}{3} + \frac{\sin^2 \theta}{2} \text{ とおくと}$$

$$\frac{1}{OB^2} = \frac{\cos^2(\theta + \frac{\pi}{2})}{3} + \frac{\sin^2(\theta + \frac{\pi}{2})}{2} = \frac{\sin^2 \theta}{3} + \frac{\cos^2 \theta}{2}$$

$$\therefore M = \frac{\cos^2 \theta}{3} + \frac{\sin^2 \theta}{2} + \frac{\sin^2 \theta}{3} + \frac{\cos^2 \theta}{2} = \frac{5}{6} //$$

(3)  $OP = OR, OQ = OS$  である。

$$\begin{aligned} L &= 2(OP^2 + OQ^2) \quad \left( \leftarrow \frac{1}{OP^2} = \frac{\cos^2 \theta}{3} + \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) \\ &= 2 \left( \frac{6}{2 + \sin^2 \theta} + \frac{6}{2 + \cos^2 \theta} \right) \quad = \frac{2 + \sin^2 \theta}{6} \\ &= \frac{60}{6 + \sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{240}{24 + \sin^2 2\theta} // \end{aligned}$$

$$\sin^2 2\theta = 0, \text{ つまり } \theta = 0, \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \max 10 //$$

$$\sin^2 2\theta = 1, \text{ つまり } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき } \min \frac{80}{5} //$$

