

第10週

医学部合否決め問題演習

[入試演習 7]

$x$  軸は水平方向,  $y$  軸は鉛直方向を向いているとし  $x$  軸,  $y$  軸の1目盛りは1 cm であると

する。式  $y = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^2 + 3 & (0 \leq x \leq 3) \\ 9\log \frac{x}{3} & (3 \leq x \leq 3e) \end{cases}$  で表される  $xy$  平面上の曲線を  $y$  軸のまわりに回

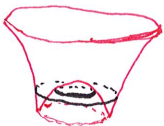
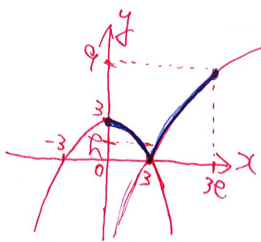
転させてできる容器に毎秒  $9\text{cm}^3$  の割合で水をそそぐ。ここで,  $\log$  は自然対数を表す。また,  $e$  は自然対数の底とする。次の各問に答えよ。

(1) 水深  $h$  cm がつぎのそれぞれの範囲にあるとき, 容器内の水量  $V\text{cm}^3$  を  $h$  で表せ。

(a)  $0 \leq h \leq 3$  (b)  $3 \leq h \leq 9$

(2)  $h=2$  となる瞬間における水面の上昇速度  $v$  cm/秒 を求めよ。

(3) 水をそそぎ始めてから  $t$  秒後の水面の上昇速度  $v$  cm/秒とする。  $3 < h < 9$  のとき,  $v$  を  $t$  で表せ。 (昭和大一医)



$$y = -\frac{1}{3}x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 = 3(3-y)$$

$$y = 9\log \frac{x}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{3}\right)^9 = e^y \Leftrightarrow x = 3e^{\frac{y}{9}} \Leftrightarrow x^2 = 9e^{\frac{2}{9}y}$$

(1)(a)  $0 \leq h \leq 3$  のとき

$$V = \pi \int_0^h (9e^{\frac{2}{9}y} - 9 + 3y) dy \quad \rightarrow S(h) = \pi(9e^{\frac{2}{9}h} - 9 + \frac{3}{2}h)$$

$$= \pi \left[ \frac{9}{2}e^{\frac{2}{9}y} - 9y + \frac{3}{2}y^2 \right]_0^h$$

$$= \pi \left( \frac{9}{2}e^{\frac{2}{9}h} - 9h + \frac{3}{2}h^2 - \frac{9}{2} \right) \quad (=V(h) \text{ のとき})$$

(b)  $3 \leq h \leq 9$  のとき

$$V = V(3) + \pi \int_3^h 9e^{\frac{2}{9}y} dy$$

$$= \pi \left( \frac{9}{2}e^{\frac{2}{9} \cdot 3} - 54 \right) + \pi \left[ \frac{9}{2}e^{\frac{2}{9}y} \right]_3^h$$

$$= \left( \frac{9}{2}e^{\frac{2}{3}} - 54 \right) \pi //$$

$$\rightarrow S(h) = 9\pi e^{\frac{2}{9}h}$$

(2)  $(V = \frac{dV}{dt} \text{ がほしい})$

$$(h=2 \text{ のとき (1) より } V = \pi(\frac{9}{2}e^{\frac{2}{9} \cdot 2} - \frac{105}{2})) \leftarrow \text{わかること}$$

題意より,  $\frac{dV}{dt} = 9$  があり

$$S(h) = \pi(9e^{\frac{2}{9}h} - 9 + 3h)$$

$$v = \frac{dh}{dt}$$

$$= \frac{dV}{dV} \times \frac{dV}{dh} \times \frac{dh}{dt}$$

$$= \frac{9}{\frac{dV}{dh}}$$

$$= \frac{9}{S'(h)} = \frac{9}{\pi(2e^{\frac{2}{9}h} - 1)}$$

$$\text{よって } v = \frac{9}{S'(h)}$$

$$= \frac{9}{S'(2)} = \frac{9}{\pi(2e^{\frac{2}{9} \cdot 2} - 1)} = \frac{3}{\pi(2e^{\frac{2}{9}} - 1)} //$$

(3)  $3 < h < 9$  のとき

$$S(h) = \pi \times 9e^{\frac{2}{9}h}$$

$$v = \frac{9}{S'(h)}$$

$$= \frac{1}{\pi e^{\frac{2}{9}h}} \leftarrow h \text{ と } t \text{ の関係}$$

よって,  $V = 9t$  がある

(1)(b) を用いて

$$9t = \pi \left( \frac{9}{2}e^{\frac{2}{9}h} - 54 \right) //$$

$$\frac{9}{2}\pi e^{\frac{2}{9}h} = 54\pi + 9t$$

$$\frac{1}{v} \pi e^{\frac{2}{9}h} = \frac{2(6\pi + t)}{9}$$

$$\therefore v = \frac{9}{2(6\pi + t)} //$$

## [入試演習 8]

次の極限値を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{n + \frac{2}{2}} + \frac{1}{n + \frac{3}{2}} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{n + \frac{3}{2}} + \frac{1}{n + \frac{5}{2}} + \cdots + \frac{2}{6n-1} \right)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \sin \frac{n\pi}{2n} \right)^{\sin \frac{n\pi}{2n}} \left( 1 + \sin \frac{(n+1)\pi}{2n} \right)^{\sin \frac{(n+1)\pi}{2n}} \left( 1 + \sin \frac{(n+2)\pi}{2n} \right)^{\sin \frac{(n+2)\pi}{2n}} \cdots \left( 1 + \sin \pi \right)^{\sin 2\pi} \right)^{\frac{1}{n}}$$

(日本医科大)

$$\begin{aligned} (1) (S_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{n + \frac{2}{2}} + \frac{1}{n + \frac{3}{2}} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n + \frac{k}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k}{2n}} \end{aligned}$$

$\int_0^2 \frac{1}{1+\frac{1}{2}x} dx = 2 \left[ \ln|t+1| \right]_0^2 = 2 \ln 2$   
 $\int_0^1 \frac{1}{1+t} \times 2 dt = 2 \ln 2$

$$\begin{aligned} (2) (S_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{n + \frac{3}{2}} + \frac{1}{n + \frac{5}{2}} + \cdots + \frac{1}{3n - \frac{1}{2}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{n + \frac{3}{2}} + \frac{1}{n + \frac{5}{2}} + \cdots + \frac{1}{n + \frac{(2n-1)}{2}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n + \frac{2k-1}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{2k-1}{2n}} \end{aligned}$$

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{2k-1}{2n}} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k-1}{n}}$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^2 \frac{1}{1+x} dx = \ln 3$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{2k-1}{2n}} = \int_0^2 \frac{1}{1+x} dx = \ln 3$   
 $1 + \frac{2(k-1)}{2n} < 1 + \frac{2k-1}{2n} < 1 + \frac{2k}{2n}$

$$(3) (S_n) \text{ を } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \text{ とする。}$$

$$\begin{aligned} \log A_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{(k+1)\pi}{n} \times \log \left( 1 + \sin \frac{(k+1)\pi}{2n} \right) \\ &\rightarrow \int_0^1 \sin((x+1)\pi) \log \left( 1 + \sin \frac{(x+1)\pi}{2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \sin(\pi x + \pi) \log \left( 1 + \sin \left( \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right) dx \\ &= - \int_0^1 \sin \pi x \log \left( 1 + \cos \frac{\pi x}{2} \right) dx \\ &= -2 \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \log \left( 1 + \cos \frac{\pi x}{2} \right) dx \end{aligned}$$

$1 + \cos \frac{\pi x}{2} = t \quad \frac{\pi x}{2} = \arccos \frac{t-1}{2}$   
 $(S_n) = -2 \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1) \log t \times \left( -\frac{2}{\pi} \right) dt$

$$\begin{aligned} &= +\frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1) \log t dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \\ &= \int_0^1 e^{-\frac{1}{\pi}} \\ &\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = e^{-\frac{1}{\pi}} \end{aligned}$$

## [演習 - 1]

体内に発生する腫瘍の発育を考える。腫瘍は完全な球形であるとし、体積を  $V$  ( $\text{cm}^3$ )、表面積を  $S$  ( $\text{cm}^2$ )、半径を  $r$  ( $\text{cm}$ ) で表す。

時刻  $t$  (年) で表し、腫瘍の発育速度を  $\frac{dV}{dt}$  と定める。

また、腫瘍の体積が  $2\text{cm}^3$  を超えると医学検査で検出可能となり、 $8\text{cm}^3$  を超えると治療が不可能となるものとする。

腫瘍の体積が  $2\text{cm}^3$  から  $8\text{cm}^3$  まで発育するのに要する時間を  $T$  とする。

(1) 発育速度が  $1\text{cm}^3/\text{年}$  で一定とする。腫瘍の半径が  $1\text{cm}$  になった時点における、

表面積と半径の増加速度、 $\frac{dS}{dt}$  ( $\text{cm}^2/\text{年}$ ) および  $\frac{dr}{dt}$  ( $\text{cm}/\text{年}$ ) をそれぞれ求めよ。

(2) 腫瘍が発生した時刻を  $0$  とするとき、時刻  $t$  (年) における発育速度が  $\frac{dV}{dt} = at$  ( $\text{cm}^3/\text{年}$ )

で表されるとする。( $a > 0$  は定数である。) 腫瘍の半径が  $1\text{cm}$  になった時点における、

表面積と半径の増加速度、 $\frac{dS}{dt}$  ( $\text{cm}^2/\text{年}$ ) および  $\frac{dr}{dt}$  ( $\text{cm}/\text{年}$ ) をそれぞれ求めよ。

(3) 発育速度がそれぞれ (1), (2) であるような2つの腫瘍 A と B が、時刻  $t=0$  に同時に発生したとする。

(i) 腫瘍 A の体積が腫瘍 B の体積を上回っている時刻  $t$  (年) の範囲を求めよ。

(ii) 腫瘍 B について  $T$  (年) の値を求めよ。

(iii) 1年に一度定期的に医学検査を受けるとする。治療が可能うちに腫瘍 B が検出できるのは、 $a$  ( $\text{cm}^3/\text{年}^2$ ) の値がどの範囲にあるときか。 (昭和大一医)

$$\text{まず、} V = \frac{4}{3}\pi r^3, S = 4\pi r^2 \text{ である。}$$

(1) 発育速度が1より  $\frac{dV}{dt} = 1$  より。

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dr}} = \frac{1}{4\pi r^2} \quad r=1 \text{ のとき} \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi}$$

$$\begin{aligned} \text{また、} \frac{dS}{dt} &= \frac{dS}{dr} \times \frac{dr}{dt} \\ &= 8\pi r \times \frac{1}{4\pi r^2} \\ &= \frac{2}{r} \quad r=1 \text{ より } \frac{dS}{dt} = 2 \end{aligned}$$

(2)  $\frac{dV}{dt} = at$  のとき。

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dr}} = \frac{at}{4\pi r^2} \quad \leftarrow \begin{array}{l} t \text{ が } 0 \text{ から } \frac{4}{a} \\ \text{(1) より } r \text{ が } 1 \end{array}$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = at \text{ より } V = \frac{1}{2}at^2 \text{ である。}$$

$$r=1 \text{ のとき } V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi \text{ より } \frac{1}{2}at^2 = \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{8\pi}{3a}} \quad (\leftarrow r=1 \text{ のとき})$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{a}{4\pi r^2} \times \sqrt{\frac{8\pi}{3a}} \\ &= \frac{a}{4\pi} \times \sqrt{\frac{8\pi}{3a}} \quad (\leftarrow r=1 \text{ より}) \\ &= \sqrt{\frac{a^2 \times 8\pi}{16\pi^2 \times 3a}} = \sqrt{\frac{a}{6\pi}} \end{aligned}$$

$$\text{また、} \frac{dS}{dt} = 8\pi r \times \frac{dr}{dt} = 8\pi \sqrt{\frac{a}{6\pi}} = \sqrt{\frac{32\pi a}{3}}$$

(3) (i) 時刻  $t$  における腫瘍 A, B のそれぞれ体積  
 は、A:  $\frac{dV}{dt} = 1$  より  $V = t$   $\left\{ \begin{array}{l} t > \frac{1}{2}at^2 \text{ とき} \\ 0 < t < \frac{2}{a} \end{array} \right.$   
 B: (2) より  $\frac{1}{2}at^2$

(ii) B について、体積  $2$  のとき  $2 = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \frac{2}{\sqrt{a}}$   
 $\therefore 8 \ll 8 = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \frac{4}{\sqrt{a}}$

$$\therefore T = \frac{4}{\sqrt{a}} - \frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{a}}$$

(iii)  $T < 1$  だと、早く  $2 \rightarrow 8\text{cm}^3$  になる(もう)で

$$T \geq 1 \quad \therefore \frac{2}{\sqrt{a}} \geq 1 \quad \text{より } 0 < a \leq 4 //$$



## [演習-2]

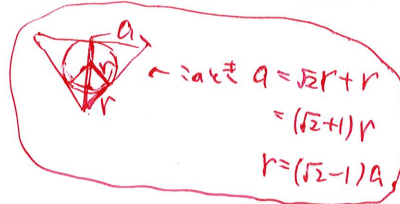
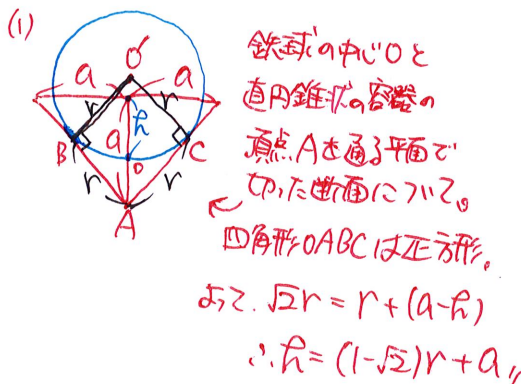
底面の半径が $a$ 、深さが $a$ の直円錐状の容器があり、水が一杯に入っている。この容器に、半径 $r$ の鉄球を静かに沈める。 $(\sqrt{2}-1)a \leq r \leq \sqrt{2}a$ の範囲で、あふれる水の量が最大となる $r$ を求めたい。以下の各問に答えよ。

(1) 鉄球の水面下に沈んでいる部分の深さ(水面から球の底までの長さ) $h$ を、 $r$ と $a$ を用いて表せ。

(2) 水面下に沈んでいる部分の鉄球の体積 $V$ を $r$ と $h$ を用いて表せ。

(3) あふれる水の量が最大となる $r$ を求めよ。

(東邦大一医)



(2) 新たに

$$x^2 + (y-r)^2 = r^2 \text{ より}$$

$$V = \int_0^h \pi (r^2 - (y-r)^2) dy$$

$$= \pi \int_0^h (2ry - y^2) dy$$

$$= \pi \left[ ry^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^h$$

$$= \frac{\pi}{3} (-h^3 + 3rh^2)$$

$\leftarrow h$ は $r$ と関連して動く。

(3) あふれる水の量は  $V = \frac{\pi}{3} (-h^3 + 3rh^2)$

$$= \frac{\pi}{3} \{ -(1-\sqrt{2})r + a \}^3 + 3r \{ (1-\sqrt{2})r + a \}^2$$

$$= \frac{\pi}{3} \{ (1-\sqrt{2})r + a \}^2 \{ -(1-\sqrt{2})r + a + 3r \}$$

$$= \frac{\pi}{3} \{ (1-\sqrt{2})r + a \}^2 \{ (2+\sqrt{2})r - a \}$$

$$= f(r) \text{ とおす}$$

$$\frac{d}{dr} f(r) = 2 \{ (1-\sqrt{2})r + a \} (1-\sqrt{2}) \{ (2+\sqrt{2})r - a \} + \{ (1-\sqrt{2})r + a \}^2 \times (2+\sqrt{2})$$

$$= \{ (1-\sqrt{2})r + a \} \{ (2-2\sqrt{2}) \{ (2+\sqrt{2})r - a \} + \{ (1-\sqrt{2})r + a \} (2+\sqrt{2}) \}$$

$$= \{ (1-\sqrt{2})r + a \} \{ (2+\sqrt{2})(3-3\sqrt{2})r + 3\sqrt{2}a \}$$

$$f(r) = 3\sqrt{2} \{ (1-\sqrt{2})r + a \} \{ (2+\sqrt{2})r - a \}$$

$$= 3\sqrt{2} \{ (\sqrt{2}-1)r - a \} \{ (2+\sqrt{2})r - a \}$$

$$= 3\sqrt{2} (\sqrt{2}-1) \{ (2+\sqrt{2})r - a \} \{ (2+\sqrt{2})r - a \}$$

$$f'(r) = 0 \text{ とき } r = a \{ (\sqrt{2}+1)a \}$$

| $r$     | $(\sqrt{2}-1)a$ | $a$ | $\sqrt{2}a$ |
|---------|-----------------|-----|-------------|
| $f(r)$  |                 | +   | -           |
| $f'(r)$ |                 | ↑   | ↓           |

$$r = a$$

## [演習-3]

(1)  $0 \leq x \leq 1$ ,  $n=1, 2, \dots$  に対して,  $\left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} - \frac{1}{1+x^2} \right| \leq x^{2n}$  を証明せよ。

(2)  $x = \tan y$  において,  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  を計算せよ。

(3) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right\}$  があることを証明し,

値を計算せよ。

(大阪医科大一医)

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} &= \sum_{k=0}^{n-1} (-x^2)^k \\ &= \sum_{k=1}^n (-x^2)^{k-1} \\ &= \frac{1 - (-x^2)^n}{1 - (-x^2)} \end{aligned}$$

よって絶対値の中身は  $\frac{-(-x^2)^n}{1+x^2}$

$$\text{したがって (左辺)} = \left| \frac{-(-x^2)^n}{1+x^2} \right| = \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq x^{2n} \quad \square$$

$$(2) x = \tan y \text{ において (左辺)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 y} \times \frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} - \frac{1}{1+x^2} \right| dx &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx - \frac{\pi}{4} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{\pi}{4} \quad \text{①} \end{aligned}$$

一方で  $\left| \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} - \frac{1}{1+x^2} dx \right| = \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} - \frac{1}{1+x^2} \right| dx$

$$\leq \int_0^1 x^{2n} dx \quad (\text{①より})$$

$$= \frac{1}{2n+1} \quad \text{②}$$

①, ②より  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

## [演習-4]

$a$  を正の定数とし、 $f(x) = e^{-\frac{x}{a}} \sin ax$  ( $x \geq 0$ ) と定義する。

このとき、以下の設問に答えなさい。

- (1)  $f(x) = 0$  となる  $x$  を小さい順に  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, \dots$  とすると、

$$x_m = \boxed{\phantom{000}} \text{ である。}$$

- (2) (1) の  $x_0, x_1, x_2, \dots$  からつくられる各区間  $[x_{k-1}, x_k]$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) において  $f(x)$

$$\text{の定積分 } S_k \text{ を求めると、} S_k = \boxed{\phantom{000}} \text{ である。}$$

- (3)  $S_1$  を初項、 $S_k$  を第  $k$  項とする無限級数の第  $n$  項までの部分 and を  $W_n$  とすると、

$$W_n = \boxed{\phantom{000}} \text{ で、さらに、} \lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \boxed{\phantom{000}} \text{ である。} \quad (\text{聖マリアンナ医科大学})$$

$$(1) f(x) = 0 \text{ あり } \sin ax = 0 \quad ax = n\pi \quad \therefore x = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{よって } x_m = \frac{m\pi}{a} //$$

$$(2) S_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-\frac{x}{a}} \sin ax \, dx$$

$$= [-ae^{-\frac{x}{a}} \sin ax]_{x_{k-1}}^{x_k} + a \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-\frac{x}{a}} \cos ax \, dx$$

$$= [-ae^{-\frac{x}{a}} \sin ax - ae^{-\frac{x}{a}} \cos ax]_{x_{k-1}}^{x_k}$$

$$+ \int_{x_{k-1}}^{x_k} ae^{-\frac{x}{a}} (-a \sin ax) \, dx$$

$$= [-ae^{-\frac{x}{a}} \sin ax - ae^{-\frac{x}{a}} \cos ax]_{x_{k-1}}^{x_k} - a^2 S_k$$

$$(3) \{S_k\} \text{ は初項 } \frac{a^3(1+e^{-\frac{\pi}{a^2}})}{1+a^4} \text{ 公比 } -e^{-\frac{\pi}{a^2}} \text{ の等比}$$

$$\therefore W_n = \frac{a^3(1+e^{-\frac{\pi}{a^2}})}{1+a^4} \frac{1-(-e^{-\frac{\pi}{a^2}})^n}{1-e^{-\frac{\pi}{a^2}}}$$

$$= \frac{a^3 \{1-(-e^{-\frac{\pi}{a^2}})^n\}}{1+a^4} //$$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \frac{a^3}{1+a^4} //$$

$$\therefore (1+a^4)S_k$$

$$= -ae^{-\frac{x_k}{a}} \sin ax_k - ae^{-\frac{x_k}{a}} \cos ax_k$$

$$+ ae^{-\frac{x_{k-1}}{a}} \sin ax_{k-1} + ae^{-\frac{x_{k-1}}{a}} \cos ax_{k-1}$$

$$= -ae^{-\frac{x_k}{a}} \cos k\pi + ae^{-\frac{x_{k-1}}{a}} \cos (k-1)\pi$$

$$= (-1)^{k-1} a^3 e^{-\frac{(k-1)\pi}{a}} (1+e^{-\frac{\pi}{a^2}})$$

$$S_k = \frac{a^3(1+e^{-\frac{\pi}{a^2}})}{1+a^4} (-e^{-\frac{\pi}{a^2}})^{k-1} //$$

$$S_k = \frac{a^3(1+e^{-\frac{\pi}{a^2}})}{1+a^4} (-e^{-\frac{\pi}{a^2}})^{k-1} //$$

$$W_n = \frac{a^3}{1+a^4} \{1-(-e^{-\frac{\pi}{a^2}})^n\} //$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \frac{a^3}{1+a^4} //$$