

[入試演習 5]

a, b, c を実数の定数とする。 $i = \sqrt{-1}$ を虚数単位として、複素数 z を未知数とする方程式

$F(z) = z^3 + aiz^2 + bz + ci = 0$ の解のいくつかの性質に関して次の問に答えなさい。

- (1) $z = \alpha$ が $F(z) = 0$ の解ならば、 $z = -\bar{\alpha}$ も $F(z) = 0$ の解であることを証明しなさい。
ただし、 $\bar{\alpha}$ は α の共役複素数とする。 $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$ は用いてよい。
- (2) $z = r$ が $F(z) = 0$ の1つの解で、 r が実数であるとする。 $c \neq 0$ とするとき、 $z = -r$, $-ai$ も $F(z) = 0$ の解であることを証明しなさい。
- (3) 実数を係数とする3次方程式は、少なくとも1つ実数解を持つことを用いて、方程式 $F(z) = 0$ は少なくとも1つの純虚数の解をもつことを証明しなさい。
- (4) 問(3)を用いて、方程式 $z^3 + iz^2 + z + 10i = 0$ の3つの解を求めなさい。

(慶應義塾大一医)

(1) $F(z) = z^3 + aiz^2 + bz + ci = 0$ について。

$z = \alpha$ が $F(z) = 0$ の解なるとき、 $\alpha^3 + ai\alpha^2 + b\alpha + ci = 0 \dots \textcircled{1}$

よるとき、 $F(-\bar{\alpha}) = -(\bar{\alpha})^3 + ai(\bar{\alpha})^2 + b(-\bar{\alpha}) + ci$

$= -(\bar{\alpha}^3) - a\bar{\alpha}^2i - b\bar{\alpha} - ci$

$= -(\alpha^3 + ai\alpha^2 + b\alpha + ci) = 0 \quad (\textcircled{1}より) \quad \text{よって } -\bar{\alpha} \text{ も解}$

- (2) $z = r$ (実数) が $F(z) = 0$ の解なるとき、(1)の結果は α が実数なときにも成り立ち、
よって、 $z = -\bar{r} = -r$ も $F(z) = 0$ の解なるとき。

よって、 $F(r) = 0$ より、 $r^3 + ar^2i + br + ci = 0$

$\Leftrightarrow r^3 + br + (ar^2 + c)i = 0$

a, b, c, r は実数なるとき、 $\begin{cases} r^3 + br = 0 \\ ar^2 + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r \neq 0 \text{ より } a \neq 0 \text{ より } r \neq 0 \\ \therefore b = -r^2, c = -ar^2 \end{cases}$

よって、 $F(z) = z^3 + aiz^2 - r^2z - ar^2i$

$= z^2(z + ai) - r^2(z + ai)$

$= (z + r)(z - r)(z + ai)$ となるから、 $F(z)$ の3つの解は $-ai$

- (3) 実数 p に対し、 $z = pi$ を考え、 $F(pi)$ を計算すると

$F(pi) = (pi)^3 + ai(pi)^2 + b(pi) + ci$

$= p^3i^3 + ap^2i^2 + bpi + ci$

$= -i(p^3 + ap^2 - bp - c)$ となるから、

3次方程式 $x^3 + ax^2 - bx - c = 0$ (は少なくとも1つの解をもつ、それを p とすれば、

pi は $F(z) = 0$ の純虚数解となる。

(4) $z^3 + iz^2 + z + 10i = 0 \dots \textcircled{2}$

(3)より、(2)の方程式も作ると $x^3 + x^2 - x - 10 = 0$ となるから、

$(x-2)(x^2+3x+5)=0$
 $x=2$

①より

よって(4)は $(z-2i)(z^2+3iz-5)=0$
 $z=2i, \frac{3i \pm \sqrt{9-20}}{2}$

[入試演習 6]

- (A) a_1, a_2, a_3 を整数とし, $f(x)$ を x^3 の係数が1である整式 $f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ とする。

定理「方程式 $f(x) = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ が有理数の解をもてば, それは整数である」を証明する。

方程式 $f(x) = 0$ が有理数解 $x = \frac{t}{s}$ (s, t は整数, $s > 0, t \neq 0$)

をもつとする。必要なら約分して s と t の最大公約数は $\boxed{1}$ と仮定してよい。

これを $\textcircled{1}$ へ代入して整理すると, 等式 $-\boxed{t^3} = \boxed{s^3}(a_1t^2 + a_2st + a_3s^2) \cdots \cdots \textcircled{2}$

を得る。

もし $s \neq 1$ ならば, ある素数 p が s の因数となる。すると $\textcircled{2}$ により p は t の素因数で

なければならない。これは $\boxed{\text{仮定}}$ と矛盾する。ゆえに $s = \boxed{1}$ である。

したがって, $\textcircled{1}$ の有理数解はじつは整数である。

- (B) $\theta = \frac{2\pi}{9}$ (ラジアン), $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$ とする。ただし, $i^2 = -1$ である。

$\beta = \alpha + \alpha^8$ とするとき, β は有理数でない実数であることを示したい。

- (1) β は実数であることを示せ。

- (2) β はある整数係数の三次方程式の解である。その方程式 $f(x) = 0$ を求めよ。

ただし, 整式 $f(x)$ は x^3 の係数を1として表せ。

- (3) (2) で求めた三次方程式は有理数の解をもたない。このことを, 関数 $y = f(x)$

のグラフを考えることによって示せ。必要なら(A)で述べられている定理を

用いてよい。

(東京慈恵会医科大)

(A)

(B) (1) $\beta = \alpha + \bar{\alpha} \leftarrow \text{共役}$
 $= 2\cos \frac{2\pi}{9} \leftarrow \text{より。}$

(2) 3倍角の公式により

$$\cos(3 \times \frac{2\pi}{9}) = 4\cos^3 \frac{2\pi}{9} - 3\cos \frac{2\pi}{9}$$

$$\text{より, } \cos \frac{2\pi}{3} = 4(\frac{\beta}{2})^3 - 3 \times \frac{\beta}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\beta^3 - \frac{3}{2}\beta$$

$$\Leftrightarrow \beta^3 - 3\beta + 1 = 0.$$

$$\text{よって } f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$$

(3) (A) で証明した定理より

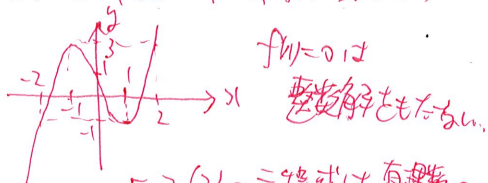
(2) で求めた方程式 $f(x) = 0$ の有理数の解をもつとすればそれは整数となるが

$$f(x) = 3(x+1)(x-1)$$

右の増減表と

$$f(-2) = -1 < 0, f(-1) = 3 > 0,$$

$$f(0) = 1 > 0, f(1) = -1 < 0, f(2) = 3 > 0 \text{ より}$$



よって (2) の方程式は有理数の解をもたない。

[演習 - 1]

以下の各問に答えよ。ただし π は円周率を表す。

(1) 複素数 z を $z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ とする。このとき、 $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)$

の値を求めよ。

(2) 絶対値 1, 偏角 2θ ($0 \leq \theta < \pi$) の複素数 w に対して $r = |1-w|$ とおくと、 $\sin \theta$ を r を用いて表せ。

(3) $\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5}$ の値を求めよ。

(東京医科歯科大)

(1) $z^5 = 1$ より、 z は方程式 $x^5 = 1$ の解。

同様に考え、 z^k ($k=0, 1, 2, 3, 4$) について

$$(z^k)^5 = (z^5)^k = 1 \text{ となる。} \quad 1, z, z^2, z^3, z^4 \text{ は } x^5 = 1 \text{ の解。}$$

$$\text{よって、} x^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0 \text{ となる。}$$

方程式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ の解は z, z^2, z^3, z^4 であることが、

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ で、} x=1 \text{ を代入すると } (1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4) = 5 //$$

(2) $w = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ より、 $1-w = 1 - (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$

$$= 2\sin^2 \theta - 2i \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2\sin \theta (\sin \theta - i \cos \theta)$$

$$\therefore r = |1-w| = |2\sin \theta| = 2\sin \theta \quad (\because 0 \leq \theta < \pi) \quad \text{〇 値は}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{r}{2} //$$

(3) $\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5} = \frac{|1-w_1|}{2} \times \frac{|1-w_2|}{2} \times \frac{|1-w_3|}{2} \times \frac{|1-w_4|}{2} \quad (\text{ただし } w_i = \cos 2\theta_i + i \sin 2\theta_i)$

$$= \frac{|(1-w_1)(1-w_2)(1-w_3)(1-w_4)|}{2^4} \quad \theta_i = \frac{i}{5}\pi \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

$$= \frac{5}{16} //$$

[演習-2]

a が実数の範囲で変化するとき、 z の方程式 $z^3 + (1-a^2)z - a = 0$ の解全体が複素数平面上において描く図形を図示せよ。 (東邦大一医)

$$z^3 + (1-a^2)z - a = 0 \quad \leftarrow z=a \text{ も因数にもつ。}$$

$$\Leftrightarrow (z-a)(z^2 + az + 1) = 0$$

$$z=a \text{ または } z^2 + az + 1 = 0$$

(i) $z=a$ とする解は、実軸上にも重く。

(ii) $z^2 + az + 1 = 0$ について。

(A) 実数解をもつとき $a^2 - 4 \geq 0$

よて $a \leq -2, 2 \leq a$ のとき、実軸上の一部も重く。(i)より重なる)

(B) 実数解をもたないとき、つまり $-2 < a < 2$ のとき

異なる2つの虚数解をもつ。このうち α とすると、もう一方は $\bar{\alpha}$

$$\begin{cases} \alpha + \bar{\alpha} = -a \quad \cdots ① \\ \alpha \bar{\alpha} = 1 \quad \cdots ② \end{cases}$$

②より、 $|\alpha| = 1$ かつ、1と-1を除く、原点中心半径1の円周上。--②'

$$\text{かつ ①より } 2\operatorname{Re}(\alpha) = -a \quad \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\alpha) = -\frac{a}{2}$$

$$-2 < a < 2 \text{ より } -1 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1 \quad (\text{②'をみれば})$$

(i), (ii)より、解全体の描く図形は、「実軸と、 $|z|=1$ と重なる内」

「解の係数の関係」

↑
(i)の別解) $-2 < a < 2$ のとき、 $z^2 + az + 1 = 0$ の虚数解は $z = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$
 $= X + Yi$ とおくと

$$X = -\frac{a}{2}, Y = \pm \frac{\sqrt{4 - a^2}}{2}$$

$$\hookrightarrow a = -2X \text{ とおくと}$$

$$Y = \pm \frac{\sqrt{4 - (2X)^2}}{2}$$

$$4Y^2 = 4 - 4X^2$$

$$\Leftrightarrow X^2 + Y^2 = 1$$

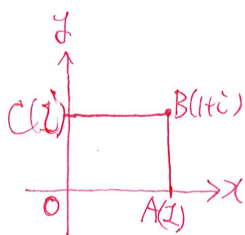
ただし $-2 < a < 2$ より $-1 < X < 1$ である。

「解の公式」

[演習-3]

複素数 z が複素数平面上の4点 $z=0$, $z=1$, $z=1+i$, $z=i$ (i は虚数単位) を頂点とする正方形の周上を動くとき, z^2 がこの平面上で描く図形の囲む面積を求めよ。

(東京女子医大)



$O(0), A(1), B(1+i), C(i)$ とする。

$w=z^2$ とすると ($w=u+vi$)

$z=x+yi$ ($x, y: \text{実数}$) とし

$$z^2 = (x+yi)^2$$

$$= x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\therefore \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases} \text{ とある。}$$

(i) z が O から A まで動くとき

$$x=t \ (0 \leq t \leq 1) \text{ かつ } y=0$$

$$\therefore w=t^2 \quad \therefore u=t^2, v=0$$

$$\text{したがって, } 0 \leq u \leq 1 \text{ かつ } v=0$$

(ii) z が A から B まで動くとき

$$x=1, y=t \ (0 \leq t \leq 1) \text{ とする。}$$

$$u=1-t^2, v=2t$$

$$\text{したがって, } u=1-\frac{v^2}{4} \ (0 \leq v \leq 2)$$

(iii) z が B から C まで動くとき

$$x=1-t, y=1 \ (0 \leq t \leq 1) \text{ とする。}$$

$$u=-2t+t^2, v=2-2t$$

$$\text{したがって, } u=-2 \times \frac{2-v}{2} + \left(\frac{2-v}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}v^2 - 1 \ (0 \leq v \leq 2)$$

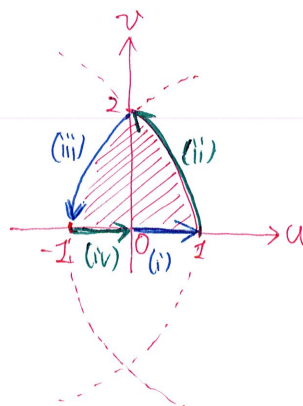
(iv) z が C から O まで動くとき

$$x=0, y=1-t \ (0 \leq t \leq 1) \text{ とする。}$$

$$u=-(1-t)^2, v=0$$

$$\text{したがって, } -1 \leq u \leq 0, v=0$$

(i) ~ (iv) より



求める面積を S とすると、

$$S = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{v^2}{4}\right) dv$$

$$= 2 \left[v - \frac{v^3}{12} \right]_0^2$$

$$= 2 \left(2 - \frac{8}{12} \right)$$

$$= \frac{8}{3}$$