

[入試演習 3]

$a_n = \sum_{k=1}^n k 2^{n-k} \ (n=1, 2, \dots)$ とおく。

- (1) 和 a_n を求めよ。
 (2) 数列 $\{a_n\}$ を次のように4個ずつの群に分ける：

$$|a_1, a_2, a_3, a_4 | a_5, a_6, a_7, a_8 | \dots$$

このとき、各群の2つ目の項以外の3数は、5で割ったときの余りが等しいことを示せ。

(大阪医科大)

$$(1) a_n = \sum_{k=1}^n k \cdot 2^{n-k}$$

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2} + \dots + n \cdot 2^0$$

$$\rightarrow 2^{-1} a_n = \frac{1 \cdot 2^{n-2} + \dots + (n-1) \cdot 2^0 + n \cdot 2^{-1}}{1}$$

$$\frac{1}{2} a_n = \frac{2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1}{2} - \frac{n}{2}$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1} - \frac{n}{2}$$

$$= 2^n - 1 - \frac{n}{2}$$

$$a_n = 2^{n+1} - 2 - n$$

$$(2) (1) \text{より, } a_1 = 2^2 - 2 - 1 = 1$$

$$a_2 = 2^3 - 2 - 2 = 4$$

$$a_3 = 2^4 - 2 - 3 = 11 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$a_4 = 2^5 - 2 - 4 = 26 \equiv 1 \pmod{5}$$

a_k と a_{k+4} の関係

を調べる。

$$\text{また, } a_{k+4} = 2^{k+5} - 2 - (k+4)$$

$$= 2^4 \cdot 2^{k+1} - k - 6$$

$$= 15 \cdot 2^{k+1} + 1 \cdot 2^{k+1} - k - 6$$

$$= 5 \cdot (3 \cdot 2^{k+1}) + \underbrace{(2^{k+1} - k - 2)}_{a_k} - 4$$

$$\equiv a_k - 4$$

$$\equiv a_k + 1$$

よって2つ目の項以外の3数は、
5で割ったときの余りが等しい。

したがって、 $a_{k+1} \equiv a_{k+3} \equiv a_{k+5} \not\equiv a_{k+7} \pmod{5}$ となる。

$$a_{k+1} + 1 \equiv a_{k+3} + 1 \equiv a_{k+5} + 1 \not\equiv a_{k+7} + 1 \pmod{5}$$

$$\text{かゝり, } a_{k+2} \equiv a_{k+4} \equiv a_{k+6} \not\equiv a_{k+8} \pmod{5}$$

これと $a_1 \equiv a_3 \equiv a_5 \not\equiv a_7 \pmod{5}$ かゝり、帰納的に示された。

(4) r_n を n を用いて表せ.(5) p_n, q_n を n を用いて表せ.

標準

【出題項目】 ① B A いろいろな数列, 約数と倍数 ② A B 円の性質, 平面ベクトルと図形

③ II III 放物線と直線, 関数の増減

④ III 2次曲線と直線, 体積 ⑤ A B 条件付き確率と乗法定理, 確率と漸化式

【ヒント】 ① (1) $S-rS$ 法で和を計算する.(2) 周期性を調べる. a_k と a_{k+4} の関係に注目する.

② (1) 接弦定理が使える.

(2) S は線分 BC をどのように外分するかに着目する.

③ (1) 判別式を利用して調べる.

(2) 微分を利用して増減の様子を調べる.

④ (2) 円すいの体積は公式で求めればよい.

⑤ (1) 青を取り出したときは袋に戻すことに注意.

(5) まず q_n を求める. p_n は q_n, r_n からすぐに求まる.

解 答

$$\textcircled{1} (1) a_n = \sum_{k=1}^n k 2^{n-k} = 2^n \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ とおくと}$$

$$S_n = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$-\frac{1}{2}S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\therefore S_n = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

よって

$$a_n = 2^n S_n = 2^{n+1} - 2 - n \quad \cdots \cdots \text{答}$$

別解 a_n を次のように計算してもよい.

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-3} + \cdots + n \cdot 1$$

$$-2^{-1}a_n = 1 \cdot 2^{n-2} + 2 \cdot 2^{n-3} + \cdots + (n-1) \cdot 1 + n \cdot 2^{-1}$$

$$2^{-1}a_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 1 - n \cdot 2^{-1}$$

$$= \frac{2^{n-1}\{1 - (2^{-1})^n\}}{1 - 2^{-1}} - n \cdot 2^{-1}$$

$$= 2^n(1 - 2^{-n}) - n \cdot 2^{-1}$$

$$= 2^n - 1 - n \cdot 2^{-1}$$

$$\therefore a_n = 2^{n+1} - 2 - n$$

(2) a_k を 5 で割ったときの商を q_k , 余りを r_k とする.
まず, 第 1 群の 4 つ a_1, a_2, a_3, a_4 について調べる.

$$a_1 = 2^2 - 2 - 1 = 1 \quad \therefore r_1 = 1$$

$$a_2 = 2^3 - 2 - 2 = 4 \quad \therefore r_2 = 4$$

$$a_3 = 2^4 - 2 - 3 = 11 \quad \therefore r_3 = 1$$

$$a_4 = 2^5 - 2 - 4 = 26 \quad \therefore r_4 = 1$$

よって, $r_1 = r_3 = r_4 \neq r_2$ が成り立つ.次に, 第 n 群の 4 つの数の関係と第 $n+1$ 群の 4 つの数の関係が同じであることを示す. a_k が第 n 群の l 番目であるとき, a_{k+4} は第 $n+1$ 群の l 番目であることを注意する.

$$a_{k+4} = 2^{k+5} - 2 - (k+4)$$

$$= 2^4 \cdot 2^{k+1} - 2 - k - 4$$

$$= (2^4 - 1) \cdot 2^{k+1} + (2^{k+1} - 2 - k) - 4$$

$$= 15 \cdot 2^{k+1} + a_k - 4$$

$$= 15 \cdot 2^{k+1} + 5q_k + r_k - 4$$

$$= 5(3 \cdot 2^{k+1} + q_k - 1) + r_k + 1$$

よって, r_{k+4} は $r_k + 1$ を 5 で割った余りに等しい.

具体的に表で整理すると右の

ようになる.

r_k	0	1	2	3	4
r_{k+4}	1	2	3	4	0

したがって, 第 n 群において i 番目と j 番目の余りが一致することと第 $n+1$ 群において i 番目と j 番目の余りが一致することは同値であり, これは n の値にはよらない.

よって, 初めに確認した第 1 群における結果と合わせると, 各群の 2 番目以外の 3 数は 5 で割ったときの余りが等しく, 2 番目だけが異なる.

【研究】 [合同式]

 a, b を整数とし, m を自然数とする. a を m で割ったときの余りと, b を m で割ったときの余りが等しいとき, $a-b$ は m の倍数であるが, このとき, a と b は m を法として合同であるといい,

$$a \equiv b \pmod{m}$$

と表す. これを合同式という.

合同式を用いて ①(2) の答案を書けば次のようになる.

 $a_n = 2^{n+1} - 2 - n$ より

$$a_1 = 2^2 - 2 - 1 = 1 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$a_2 = 2^3 - 2 - 2 = 4 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$a_3 = 2^4 - 2 - 3 = 11 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$a_4 = 2^5 - 2 - 4 = 26 \equiv 1 \pmod{5}$$

よって

$$a_1 \equiv a_3 \equiv a_4 \equiv a_2 \pmod{5}$$

すなわち, 第 1 群の 4 つについては, 2 番目以外の 3 つは 5 で割った余りが等しく, 2 番目だけが異なる.

次に, 第 n 群の 4 つの数の関係と第 $n+1$ 群の 4 つの数の関係が n によらず同じであることを示す. a_k が第 n 群の l 番目ならば, a_{k+4} は第 $n+1$ 群の l 番目であることを注意する.

$$a_{k+4} = 2^{k+5} - 2 - (k+4)$$

$$= 2^4 \cdot 2^{k+1} - 2 - k - 4$$

$$= (2^4 - 1) \cdot 2^{k+1} + (2^{k+1} - 2 - k) - 4$$

$$=15 \cdot 2^{k+1} + a_k - 4$$

$$\equiv a_k - 4 \equiv a_k + 1 \pmod{5}$$

よって

$$a_{4k+1} \equiv a_{4k+3} \equiv a_{4k+4} \equiv a_{4k+2} \pmod{5}$$

ならば

$$a_{4k+1} + 1 \equiv a_{4k+3} + 1 \equiv a_{4k+4} + 1 \equiv a_{4k+2} + 1 \pmod{5}$$

$$\therefore a_{4k+5} \equiv a_{4k+7} \equiv a_{4k+8} \equiv a_{4k+6} \pmod{5}$$

$$\therefore a_{4(k+1)+1} \equiv a_{4(k+1)+3} \equiv a_{4(k+1)+4} \equiv a_{4(k+1)+2} \pmod{5}$$

このことと

$$a_1 \equiv a_3 \equiv a_4 \equiv a_2 \pmod{5}$$

より、題意は示された。

② (1) $\triangle SAB$ と $\triangle SCA$

において

$$\angle ASB = \angle CSA \text{ (共通)}$$

$$\angle SAB = \angle SCA$$

(接弦定理)

二角相等により

$$\triangle SAB \sim \triangle SCA$$

面積比は

$$\triangle SAB : \triangle SCA = AB^2 : CA^2 = c^2 : b^2$$

.....[答]

(2) $BS : CS = \triangle SAB : \triangle SCA = c^2 : b^2$

よって、点Sは線分BCを $c^2 : b^2$ に外分するから

$$\vec{OS} = \frac{-b^2 \vec{OB} + c^2 \vec{OC}}{c^2 - b^2} = \frac{c^2 \vec{OC} - b^2 \vec{OB}}{c^2 - b^2}$$

(3) (2)で示したことから

$$\vec{OT} = \frac{a^2 \vec{OA} - c^2 \vec{OC}}{a^2 - c^2}, \quad \vec{OU} = \frac{b^2 \vec{OB} - a^2 \vec{OA}}{b^2 - a^2}$$

よって

$$(c^2 - b^2) \vec{OS} = c^2 \vec{OC} - b^2 \vec{OB}$$

$$(a^2 - c^2) \vec{OT} = a^2 \vec{OA} - c^2 \vec{OC}$$

$$(b^2 - a^2) \vec{OU} = b^2 \vec{OB} - a^2 \vec{OA}$$

これらをたし合わせると

$$(c^2 - b^2) \vec{OS} + (a^2 - c^2) \vec{OT} + (b^2 - a^2) \vec{OU} = \vec{0}$$

よって、求める x, y, z の1組として次を得る。

$$(x, y, z) = (c^2 - b^2, a^2 - c^2, b^2 - a^2) \quad \dots [答]$$

(4) $x + y + z = (c^2 - b^2) + (a^2 - c^2) + (b^2 - a^2) = 0$

$$x \vec{OS} + y \vec{OT} + z \vec{OU} = \vec{0} \text{ より}$$

$$(x + y + z) \vec{OS} + y(\vec{OT} - \vec{OS}) + z(\vec{OU} - \vec{OS}) = \vec{0}$$

$$\therefore y(\vec{OT} - \vec{OS}) + z(\vec{OU} - \vec{OS}) = \vec{0}$$

$$\therefore y \vec{ST} + z \vec{SU} = \vec{0}$$

$$z = b^2 - a^2 \neq 0 \text{ より}$$

$$\vec{SU} = -\frac{y}{z} \vec{ST}$$

よって、S, T, U は一直線上にある。

③ (1) L_θ の方程式は

$$(\cos \theta)x + (\sin \theta)y = 1 \quad \therefore y = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}x + \frac{1}{\sin \theta}$$

そこで、 $(x-a)^2 - \frac{1}{4} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}x + \frac{1}{\sin \theta}$ とすると

$$x^2 + \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - 2a\right)x + \left(a^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{\sin \theta}\right) = 0$$

L_θ が P_a に接するための条件は、これが重解をもつことであるから、判別式を考えて

$$\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - 2a\right)^2 - 4\left(a^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{\sin \theta}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - 4a \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + 1 + \frac{4}{\sin \theta} = 0$$

$$\therefore \cos^2 \theta - 4a \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta + 4 \sin \theta = 0$$

$$\therefore 4a \sin \theta \cos \theta = 1 + 4 \sin \theta$$

よって、 $a = \frac{1 + 4 \sin \theta}{4 \sin \theta \cos \theta}$ [答]

(2) $f(\theta) = \frac{1 + 4 \sin \theta}{4 \sin \theta \cos \theta}$ とおく。

$$f'(\theta) = \frac{1}{4}$$

$$\times \frac{4 \cos \theta \cdot \sin \theta \cos \theta - (1 + 4 \sin \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{(\sin \theta \cos \theta)^2}$$

$$= \frac{4 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) - (1 + 4 \sin \theta)(1 - 2 \sin^2 \theta)}{4(\sin \theta \cos \theta)^2}$$

$$= \frac{4 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta - (1 + 4 \sin \theta - 2 \sin^2 \theta - 8 \sin^3 \theta)}{4(\sin \theta \cos \theta)^2}$$

$$= \frac{4 \sin^3 \theta + 2 \sin^2 \theta - 1}{4(\sin \theta \cos \theta)^2}$$

$$= \frac{(2 \sin \theta - 1)(2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta + 1)}{4(\sin \theta \cos \theta)^2}$$

$$= \frac{(2 \sin \theta - 1) \left\{ 2 \left(\sin \theta + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right\}}{4(\sin \theta \cos \theta)^2}$$

よって、増減表は右のよ

うになり、最小値は

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1 + 4 \cdot \frac{1}{2}}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

求めるグラフの概形は右図の

ようになる。

(3) (2)の結果より、 a の範囲

は

$$a \geq \sqrt{3}$$

..... [答]

④ (1) $y = x$ を $\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ に代入すると

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

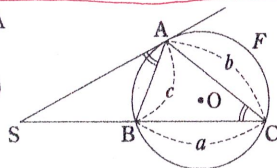
$$\therefore b^2(x-1)^2 + a^2x^2 = a^2b^2$$

$$\therefore (a^2 + b^2)x^2 - 2b^2x + b^2(1 - a^2) = 0$$

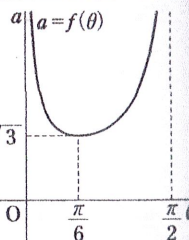
接するための条件はこれが重解をもつことであるから

$$(b^2)^2 - (a^2 + b^2) \cdot b^2(1 - a^2) = 0$$

$$\therefore b^2 - (a^2 + b^2)(1 - a^2) = 0$$



θ	(0)	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$			-	0	+
$f(\theta)$	(∞)	\searrow	最小	\nearrow	(∞)



[入試演習 4]

半径1の円Oと半径1の円O₁が外接しており、

さらに2つの円はともに直線lに接している。

いま図1のように、円O₂は、円Oと円O₁の

両方に外接し、かつ、直線lにも接している。

以下、 $n=2, 3, \dots$ に対して、円O_{n+1}を円Oと円O_nの両方に外接し、かつ、直線lにも接しているように作っていくとする。

l

円O_nの半径を r_n で表すとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 円O、O_nおよびO_{n+1}と直線lとの接点を、

図2

それぞれ、P、Q_nおよびQ_{n+1}とする(図2を参照)。

このとき、Q_nQ_{n+1}、Q_nPおよびQ_{n+1}Pを、

それぞれ、 r_n 、 r_{n+1} を用いて表しなさい。

l

- (2) r_n をnの式で表しなさい。

- (3) 2点O_nとO_{n+1}を通る直線と直線lとのなす角を θ_n で表す(図2を参照)。

ただし、 $0 \leq \theta_n < \frac{\pi}{2}$ とする。このとき $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \theta_n}{\cos \theta_n}$ を求めなさい。(日本大一医)

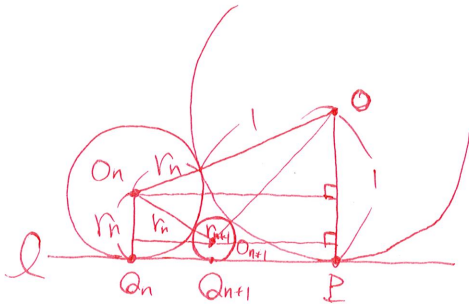
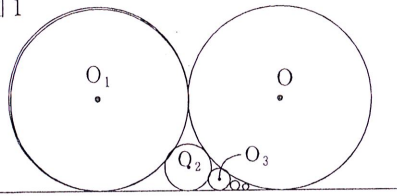
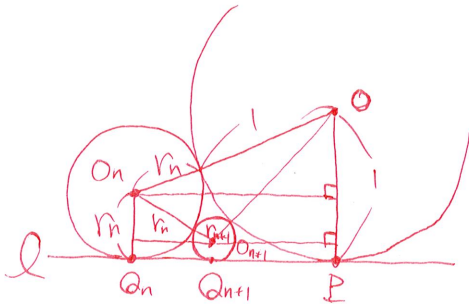


図1



l



- (1) 図の3)の図について、中心間の長さ
半径との関係(これだけわかればOK)

$$Q_n P = \sqrt{(1+r_n)^2 - (1-r_n)^2} = 2\sqrt{r_n}$$

$$Q_n Q_{n+1} = \sqrt{(r_n + r_{n+1})^2 - (r_n - r_{n+1})^2} = 2\sqrt{r_n r_{n+1}}$$

$$Q_{n+1} P = \sqrt{(1+r_{n+1})^2 - (1-r_{n+1})^2} = 2\sqrt{r_{n+1}}$$

- (2) よって、 $Q_n P = Q_n Q_{n+1} + Q_{n+1} P$ が成り立つ。

$$2\sqrt{r_n} = 2\sqrt{r_n r_{n+1}} + 2\sqrt{r_{n+1}}$$

両辺を $2\sqrt{r_n r_{n+1}}$ でわって

$$\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{r_n}} + 1$$

$$r_1 = 1 \text{ かつ } \frac{1}{\sqrt{r_n}} = n \quad \therefore \sqrt{r_n} = \frac{1}{n} \quad \therefore r_n = \frac{1}{n^2}$$

$$(3) \cos \theta_n = \frac{2\sqrt{r_n r_{n+1}}}{r_n + r_{n+1}} \quad (*)$$

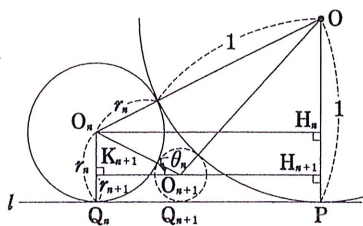
$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \theta_n} &= \frac{r_n + r_{n+1}}{2\sqrt{r_n r_{n+1}}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{r_n}{r_{n+1}}} + \sqrt{\frac{r_{n+1}}{r_n}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{(n+1)^2}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2}{(n+1)^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} + \frac{n}{n+1} \right) = \frac{2n^2 + 2n + 1}{2n(n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{よって、} \frac{1 - \cos \theta_n}{\cos \theta_n} &= \frac{1}{\cos \theta_n} - 1 \\ &= \frac{1}{2n(n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \theta_n}{\cos \theta_n} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n(n+1)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$=13 \sin \theta = 13 \cdot \frac{2\sqrt{30}}{13} = 2\sqrt{30} \quad \dots\dots[\text{答}]$$

② (1) 右図のよ
うに O_n から直線
 OP に下ろした垂
線の足を H_n ,
 O_{n+1} から直線
 O_nQ_n に下ろした
垂線の足を K_{n+1}
とする.


$$\Delta O_n O_{n+1} K_{n+1}$$

に三平方の定理を用いて

$$\begin{aligned} Q_n Q_{n+1} &= O_{n+1} K_{n+1} \\ &= \sqrt{O_n O_{n+1}^2 - O_n K_{n+1}^2} \\ &= \sqrt{(r_n + r_{n+1})^2 - (r_n - r_{n+1})^2} \\ &= 2\sqrt{r_n r_{n+1}} \end{aligned}$$

 $\Delta 00_n H_n$ に三平方の定理を用いて

$$Q_n P = O_n H_n$$

$$= \sqrt{(1+r_n)^2 - (1-r_n)^2} = 2\sqrt{r_n} \quad \dots\dots\dots [\text{答}]$$

 $\Delta 00_{n+1}H_{n+1}$ に三平方の定理を用いて

$$Q_{n+1}P = O_{n+1}H_{n+1} = \sqrt{(1+r_{n+1})^2 - (1-r_{n+1})^2} = 2\sqrt{r_{n+1}}$$

.....[答]

(2) $Q_n P = Q_n Q_{n+1} + Q_{n+1} P$ と(1)の結果より

$$2\sqrt{r_n} = 2\sqrt{r_n r_{n+1}} + 2\sqrt{r_{n+1}}$$

両辺を $2\sqrt{r_n r_{n+1}}$ で割って

$$\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{r_n}}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} - \frac{1}{\sqrt{r_n}} = 1 \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$r_1=1$ であるから

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + (n-1) \cdot 1 = n$$

$$\therefore r_n = \frac{1}{n^2} \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots\dots[\text{答}]$$

《注意》 ①は $n=1$ のときも成り立つ.

(3) (2)の結果より

$$\begin{aligned}\cos \theta_n &= \frac{Q_n Q_{n+1}}{r_n + r_{n+1}} = \frac{2\sqrt{r_n r_{n+1}}}{r_n + r_{n+1}} \\ \therefore \frac{1}{\cos \theta_n} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{r_n}{r_{n+1}}} + \sqrt{\frac{r_{n+1}}{r_n}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} + \frac{n}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n^2 + 2n + 1}{n(n+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^N \frac{1 - \cos \theta_n}{\cos \theta_n} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{\cos \theta_n} - 1 \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{2n^2 + 2n + 1}{n(n+1)} - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) \xrightarrow{(N \rightarrow \infty)} \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \theta_n}{\cos \theta_n} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots [\text{答}]$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \dots\dots (*)$$

$$(1) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

を(*)に代入すると

$$\frac{r^2 \cos^2 \theta}{4} + (r \sin \theta - 1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{r^2}{4} \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - 2r \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow r\{r(\cos^2\theta+4\sin^2\theta)-8\sin\theta\}=0$$

$$\Leftrightarrow r\{r(1+3\sin^2\theta)-8\sin\theta\}=0$$

$$r \neq 0 \text{ のとき, } r = \frac{8 \sin \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

これは $r=0$. すなわち P が原点と一致するとき

($\theta=0$ または, $\theta=\pi$) も成立する. よって, 楕円の極方程式は①で与えられる.

(2) $t = \sin \theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ とおくと $0 \leq t \leq 1$ で $t \neq 0$

のとき、相加・相乗平均の不等式より

$$r = \frac{8t}{1+3t^2} = \frac{8}{\frac{1}{t}+3t} \leq \frac{8}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\text{等号は } \frac{1}{t} = 3t \text{ すなわち } t = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき成立} \right)$$

このとき、

$$x = r \cos \theta = \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$y = r \sin \theta = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \begin{cases} (r \text{ の 最大値}) = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ P\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{3}\right) \end{cases} \dots\dots[\text{答}]$$

〈注意〉 $t=0$ のとき $r=0$ だから, この場合ははじ

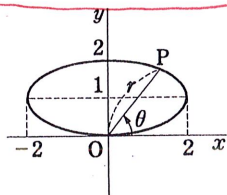
めから除外して考えてもよい. また $f(t) = \frac{8t}{1+3t^2}$

とおくと, $f'(t) = \frac{8(1-3t^2)}{(1+3t^2)^2}$ で, これより r の最大値

を求めてもよい。

(3) (1)の結果より

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8 \sin \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta} \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8 \sin \theta}{4 - 3 \cos^2 \theta} \, d\theta = \int_1^0 \frac{-8}{4 - 3u^2} \, du \quad (u = \cos \theta) \\ &= 8 \int_0^1 \frac{1}{(2 + \sqrt{3}u)(2 - \sqrt{3}u)} \, du \\ &= 8 \cdot \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}u} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}u} \right) \, du \end{aligned}$$



[演習 - 1]

数列 $-1^3, 2^3, -3^3, 4^3, -5^3, 6^3, \dots$ について、以下の設問に答えよ。

- (1) この数列の一般項 a_n を求めよ。
- (2) 初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とする。このとき、 n が偶数の場合と奇数の場合にわけて S_n を求めよ。
- (3) m を自然数とする。 S_{2m} と S_{2m-1} の間に次の関係式が成り立つとき、 m を求めよ。

$$\frac{S_{2m} - S_{2m-1}}{S_{2m} + S_{2m-1}} = 20$$

(岩手医科大)

$$(1) a_n = (-1)^n n^3 //$$

(2) (i) n が偶数のとき、 $n = 2m$ ($m = 1, 2, \dots$) とおくと

$$\begin{aligned} S_n &= -1^3 + 2^3 - 3^3 + \dots + (-1)^n n^3 \\ &= -1^3 + 2^3 - 3^3 + \dots + (-1)^{2m} (2m)^3 \\ &= 2^3 + 4^3 + \dots + (2m)^3 - \{1^3 + 3^3 + \dots + (2m-1)^3\} \\ &= \sum_{k=1}^m (2k)^3 - \sum_{k=1}^m (2k-1)^3 \\ &= \sum_{k=1}^m (12k^2 - 6k + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow = 12 \times \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1) - 6 \times \frac{1}{2} m(m+1) + m \\ &= m \{ 2(m+1)(2m+1) - 3(m+1) + 1 \} \\ &= m(4m^2 + 3m) \\ &= m^2(4m+3) \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)^2 \left(4 \times \frac{n}{2} + 3\right) \\ &= \frac{1}{4} n^2 (2n+3) // \end{aligned}$$

(ii) n が奇数のとき $n = 2m-1$ ($m = 1, 2, \dots$) とおくと

$$\begin{aligned} S_n &= S_{2m-1} \\ &= S_{2m} - a_{2m} \\ &= m^2(4m+3) - (2m)^3 \\ &= m^2 \{ (4m+3) - 8m \} \\ &= m^2(4m-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \left(-4 \times \frac{n+1}{2} + 3\right) \\ &= \frac{1}{4} (n+1)^2 (-2n+1) \\ &= -\frac{1}{4} (n+1)^2 (2n-1) // \end{aligned}$$

(3) (2) の結果より、

$$\frac{m^2(4m+3) + m^2(4m-3)}{m^2(4m+3) - m^2(4m-3)} = 20$$

$$\therefore 8m^3 = 20 \times 6m^2$$

$$m > 0 \text{ より } 8m = 120$$

$$m = 15 //$$

$$CT = \frac{1}{2} C_1 R = \frac{1}{2} f(a) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4} \dots\dots\dots[\text{答}]$$

$$\text{また } \triangle ATS \sim \triangle DRS, AT : DR = \frac{\alpha}{2} : (1-\alpha)$$

$= \alpha : 2(1-\alpha)$ であるから

$$TS = \frac{\alpha}{\alpha + 2(1-\alpha)} TR = \frac{\alpha}{2-\alpha} \cdot \frac{1}{2} f(a)$$

ここで, ①から

$$\frac{\alpha}{2-\alpha} = \frac{2\alpha}{4-2\alpha} = \frac{2-\sqrt{2}}{4-(2-\sqrt{2})} = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\ = 3-2\sqrt{2}$$

よって

$$TS = (3-2\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{3\sqrt{14}}{4} - \sqrt{7} \dots\dots\dots[\text{答}]$$

同様に

$$AS = \frac{\alpha}{2-\alpha} AD = (3-2\sqrt{2}) \cdot 1 \\ = 3-2\sqrt{2}$$

したがって, $\triangle ASC_2$ において余弦定理より

$$SC_2^2 = (3-2\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2(3-2\sqrt{2}) \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ \\ = 15 - 10\sqrt{2}$$

$$\text{よって } SC = \sqrt{15-10\sqrt{2}} = \sqrt{10} - \sqrt{5} \dots\dots\dots[\text{答}]$$

$$\textcircled{2} (1) \log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 x) \text{ から}$$

$$\log_2\left(\frac{\log_2 x}{2}\right) = \frac{\log_2(\log_2 x)}{2}$$

$$\log_2(\log_2 x) - 1 = \frac{1}{2} \log_2(\log_2 x)$$

$$\log_2(\log_2 x) = 2, \log_2 x = 2^2 = 4$$

$$\therefore x = 2^4 = 16 \dots\dots\dots[\text{答}]$$

$$(2) \log_8(\log_4(\log_2 2^n)) = 1 \text{ から}$$

$$\frac{\log_2(\log_4 n)}{3} = 1, \log_4 n = 2^3 = 8$$

$$\therefore n = 4^8 = 65536 \dots\dots\dots[\text{答}]$$

$$(3) \log_2(\log_2(\log_2(\log_2(\log_2 x)))) = 1 \text{ から}$$

$$\log_2(\log_2(\log_2(\log_2 x))) = 2$$

$$\log_2(\log_2(\log_2 x)) = 2^2 = 4, \log_2(\log_2 x) = 2^4 = 16$$

$$\log_2 x = 2^{16} = 65536, x = 2^{65536}$$

$$\log_{10} x = \log_{10} 2^{65536} = 65536 \log_{10} 2 = 65536 \times 0.301 \\ = 19726.336$$

よって, x は 19727 桁の整数である $\dots\dots\dots[\text{答}]$

[注] $\log_{10} 2$ の詳しい値は $\log_{10} 2 = 0.3010299\dots$ であるから

$$65536 \times 0.301029 < \log_{10} x < 65536 \times 0.30103$$

$$\therefore 19728.2\dots < \log_{10} x < 19728.3\dots$$

よって, 正確には x は 19729 桁の整数である.

$$\textcircled{3} (1) g(x) = -\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x (\sqrt{1-t^2})' dt$$

$$= \left[\sqrt{1-t^2} \right]_0^x = \sqrt{1-x^2} - 1 \dots\dots\dots[\text{答}]$$

$$(2) f(x) = g(x) + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \text{ において}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = k \text{ とおくと, (1)の結果から}$$

$$f(x) = g(x) + k = \sqrt{1-x^2} + k - 1 \dots\dots\dots\textcircled{1}$$

したがって

$$k = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1-t^2} + k - 1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{k-1}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} + (k-1) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$\text{ここで } t = \sin \theta \text{ とおくと } dt = \cos \theta d\theta$$

であるから

$$\begin{array}{c|c} t & 0 \rightarrow \frac{1}{2} \\ \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{6} \end{array}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} \cos \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{ゆえに } k = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}(k-1), k = \frac{3-\pi}{6-\pi}$$

①に代入して

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{3-\pi}{6-\pi} - 1 = \sqrt{1-x^2} - \frac{3}{6-\pi} \dots\dots\dots[\text{答}]$$

$$\textcircled{4} (1) \text{ 数列 } -1^3, 2^3, -3^3, 4^3, \dots\dots \text{の一般項 } a_n \text{ は} \\ a_n = (-1)^n n^3 \dots\dots\dots[\text{答}]$$

$$(2) n \text{ が偶数の場合, } n = 2m (m=1, 2, \dots) \text{ とおくと}$$

$$S_n = S_{2m} = -1^3 + 2^3 - 3^3 + \dots + (2m)^3 \\ = \{2^3 + 4^3 + \dots + (2m)^3\} - \{1^3 + 3^3 + \dots + (2m-1)^3\}$$

$$= \sum_{k=1}^m (2k)^3 - \sum_{k=1}^m (2k-1)^3 = \sum_{k=1}^m (12k^2 - 6k + 1)$$

$$= 2m(m+1)(2m+1) - 3m(m+1) + m$$

$$= m^2(4m+3)$$

$$= \left(\frac{n}{2}\right)^2 \left\{ 4\left(\frac{n}{2}\right) + 3 \right\} = \frac{1}{4} n^2(2n+3) \dots\dots\dots[\text{答}]$$

$$n \text{ が奇数の場合, } n = 2m-1 (m=1, 2, \dots) \text{ とおくと}$$

$$S_n = S_{2m-1} = S_{2m} - a_{2m}$$

$$= m^2(4m+3) - (-1)^{2m}(2m)^3 = -m^2(4m-3)$$

$$= -\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \left\{ 4\left(\frac{n+1}{2}\right) - 3 \right\} = -\frac{1}{4} (n+1)^2(2n-1)$$

$\dots\dots\dots[\text{答}]$

$$(3) (2) \text{ から}$$

$$\frac{S_{2m} - S_{2m-1}}{S_{2m} + S_{2m-1}} = \frac{m^2(4m+3) + m^2(4m-3)}{m^2(4m+3) - m^2(4m-3)}$$

$$= \frac{4}{3} m = 20$$

$$\therefore m = 15 \dots\dots\dots[\text{答}]$$

$$\textcircled{5} (1) |z+i| = |z-2+i| \text{ から}$$

$$|z-(-i)| = |z-(2-i)|$$

よって, z は 2 点 $-i, 2-i$ を結ぶ線分の垂直二等分線, すなわち点 1 を通り虚軸に平行な直線を描く.

$\dots\dots\dots[\text{答}]$

$$(2) |z+i| = |z-2+i| \text{ のとき } z+i \neq 0 \text{ であるから,} \\ \text{両辺を } |z+i| \text{ で割ると}$$

[演習 - 2]

\sqrt{n} を小数点以下第一位で四捨五入した整数を a_n とする数列 $\{a_n\}$ を考える。

が正ではない。

(1) $a_{150} = \boxed{}$

(2) $6 \leq a_n \leq 7$ のとき $\boxed{} \leq n \leq \boxed{}$ である。一般に正の整数 k について、

$a_n = k$ となるのは第 $\boxed{}$ 項から第 $\boxed{}$ 項までである。

(3) $\sum_{i=1}^n a_i \geq 1000$ となる最小の n において $a_n = \boxed{}$ であり、 $n = \boxed{}$ である。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \boxed{}$

(東海大一医)

(1) $12 < \sqrt{150} < 13$ で"ある"。ここ。

$12 < \sqrt{150} < 12.5$ なのか $12.5 \leq \sqrt{150} < 13$ なのかを調べる。

$(12.5)^2 = 156.25$ より $\sqrt{150} < 12.5$ より $12 \neq$

(2) $6 \leq a_n \leq 7$ のとき、 $5.5 \leq \sqrt{n} < 7.5$ かつ、 $30.25 \leq n < 56.25$ $\therefore 31 \leq n \leq 56$ //

一般に、 $a_n = k$ とあるのは $k - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$ かつ、 $(k - \frac{1}{2})^2 \leq n < (k + \frac{1}{2})^2$

より、 $k^2 - k + \frac{1}{4} \leq n < k^2 + k + \frac{1}{4}$ $\therefore k^2 - k + 1 \leq n \leq k^2 + k //$

(3) (2) より、 $a_n = k$ とある n は、 $k^2 + k - (k^2 - k + 1) + 1 = 2k$ (2) あり。

ここ!! $\sum_{k=1}^N 2k \cdot k = \frac{1}{3} N(N+1)(2N+1) \stackrel{f(N)}{=} //$

← 群と見て、 N 群まで"ある"

$N = 10$ のとき $\frac{1}{3} \times 10 \times 11 \times 21 = 770$

$N = 11$ " $\frac{1}{3} \times 11 \times 12 \times 23 = 1012$

$f(N)$ は単調増加。 $N = 11$ 。

したがって、 $a_n = 11$ で"ある"。 $\sum_{i=1}^n a_i = 1001$ で"ある"。 $n = \frac{11}{2} \cdot 2k - 1$

$\uparrow 1012 - 11$

$= 11 \cdot 12 - 1 = 131 //$

は"ある"で!!

(4) 一般に、 $a_n - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n} < a_n + \frac{1}{2}$ かつ、

$\sqrt{n} - \frac{1}{2} < a_n \leq \sqrt{n} + \frac{1}{2}$

同様に考えて、 $\sqrt{2n} - \frac{1}{2} < a_{2n} \leq \sqrt{2n} + \frac{1}{2}$

したがって、 $\frac{\sqrt{2n} - \frac{1}{2}}{\sqrt{n} + \frac{1}{2}} < \frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{\sqrt{2n} + \frac{1}{2}}{\sqrt{n} - \frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2n}}}{1 + \frac{1}{2\sqrt{n}}} < \frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}}$

→ は"ある" $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \sqrt{2} //$

③ 答 ア 12 イ 31 ウ 56 エ k^2-k+1
オ k^2+k カ 11 キ 131 ク $\sqrt{2}$

【解説】(1) $12 < \sqrt{150} < 13$ は容易にわかる.

$12 < \sqrt{150} < 12.5$ または $12.5 \leq \sqrt{150} < 13$ である.

$$12.5^2 = 156.25 > 150$$

$$\therefore 12 < \sqrt{150} < 12.5 \quad \text{したがって} \quad a_{150} = 12$$

(2) $6 \leq a_n \leq 7$ となるのは $5.5 \leq \sqrt{n} < 7.5$

$$30.25 \leq n < 56.25$$

$$\therefore 31 \leq n \leq 56$$

$$a_n = k \text{ となるのは } k - 0.5 \leq \sqrt{n} < k + 0.5$$

$$(k - 0.5)^2 \leq n < (k + 0.5)^2$$

$$k^2 - k + 0.25 \leq n < k^2 + k + 0.25$$

$$\therefore k^2 - k + 1 \leq n \leq k^2 + k$$

(3) (2)より $a_n = k$ となる n は $2k$ 個ある.

$a_n = K$ となる最後の n を N_K とおく.

$$N_K = K^2 + K$$

$$S_K = \sum_{i=1}^{N_K} a_i = \sum_{k=1}^K k \cdot 2k = \frac{1}{3} K(K+1)(2K+1)$$

$$K=10 \text{ とすると } S_{10} = 770$$

$$K=11 \text{ とすると } S_{11} = 1012$$

初めて $\sum_{i=1}^n a_i \geq 1000$ となるのは

$$a_n = 11, \sum_{i=1}^n a_i = 1001, n = N_{11} - 1 = 131$$

$$(4) a_n - 0.5 \leq \sqrt{n} < a_n + 0.5 \text{ より}$$

$$\sqrt{n} - 0.5 < a_n \leq \sqrt{n} + 0.5$$

また

$$\sqrt{2n} - 0.5 < a_{2n} \leq \sqrt{2n} + 0.5$$

ゆえに

$$\frac{\sqrt{2n} - 0.5}{\sqrt{n} + 0.5} < \frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{\sqrt{2n} + 0.5}{\sqrt{n} - 0.5}$$

$$\frac{\sqrt{2} - \frac{0.5}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{0.5}{\sqrt{n}}} < \frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{\sqrt{2} + \frac{0.5}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{0.5}{\sqrt{n}}}$$

ところで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} - \frac{0.5}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{0.5}{\sqrt{n}}} = \sqrt{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} + \frac{0.5}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{0.5}{\sqrt{n}}} = \sqrt{2}$$

$$\text{ゆえに } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \sqrt{2}$$

◆出題傾向と学習ポイント◆
新過程になると整数問題が出題される可能性が大きい.

東京薬科大学

薬学部〈B方式・前期〉

試験日 1月30日 時間 80分 入試科目 数I・II・A・B (数Ⅱ)

① (1) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{7})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{7})(-\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7}) = \boxed{\text{アイ}}$

(2) 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ が, $x = -2$ で極大値を, $x = 1$ で極小値をとるなら,

$$a = \frac{\boxed{\text{＊ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}, b = \frac{\boxed{\text{＊オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

(3) 座標平面上に原点OとA(3, 0), B(0, 4)があり, 点Pは t を実数として,

$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$ を満たす. $|\overrightarrow{OP}|$ が最小になるのは $t = \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ のときである. このとき \overrightarrow{OP} と \overrightarrow{AB} のなす角は $\boxed{\text{コサ}}^\circ$ である.

(4) 1階, 2階, 4階, 5階にだけ停止する荷物用のエレベーターで, 1階にある10 kg, 20 kg, 30 kgの3個の荷物の全てを上階に運ぶ. 一つの階に運ばれる荷物が複数個や0個になることを認めると, 荷物の運び方は $\boxed{\text{シス}}$ 通りである. 10 kgを1階分上げるごとに1単位の電力が必要であると仮定すると, 3個の荷物を上げるために必要な電力の期待値は $\boxed{\text{セソ}}$ 単位である.

標準

② (1) 不等式 $1 + \frac{1}{\log_2 x} - \frac{3}{\log_3 x} < 0$ を解くと, $\boxed{\text{タ}} < x < \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である.

(2) 関数 $f(x) = 8^x + 8^{-x} - 5(4^x + 4^{-x}) + 6(2^x + 2^{-x})$ がある. ただし, x は全ての実数を動く.

(i) $2^x + 2^{-x} = t$ とおくと, t の取り得る値の範囲は $t \geq \boxed{\text{＊ト}}$ である.

(ii) $4^x + 4^{-x}$, $8^x + 8^{-x}$ を t の式で表すと $4^x + 4^{-x} = t^2 + \boxed{\text{＊ナ}}$, $8^x + 8^{-x} = t^3 + \boxed{\text{＊ニ}}$ t である.

(iii) $f(x)$ を t の式で表すと, $f(x) = t^3 + \boxed{\text{＊ヌ}}$ $t^2 + \boxed{\text{＊ネ}}$ $t + \boxed{\text{＊ノハ}}$ である.

[演習-3]

正の整数 n に対し、 n 以下の正の整数のうち、3 で割り切れるものの個数を a_n 、3 または 7 で割り切れるものの個数を b_n 、3 または 7 で割り切れるものの総和を S_n とする。

たとえば、 $a_{100} = \boxed{\quad}$ 、 $b_{100} = \boxed{\quad}$ 、 $S_{100} = \boxed{\quad}$ である。

n が限りなく大きくなるとき、 $\frac{a_n}{n}$ は $\boxed{\quad}$ に収束し、 $\frac{b_n}{n}$ は $\boxed{\quad}$ に収束する。また、

n が限りなく大きくなるとき、 $\frac{S_n}{n^c}$ が正の数に収束するような定数 c の値は $\boxed{\quad}$ であり、

c をこのように定めると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^c} = \boxed{\quad}$ となる。 (日本医科大)

3 を越えない最大の整数を $\lfloor x \rfloor$ とする。

$$a_{100} = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33 //$$

$$b_{100} = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{21} \right\rfloor = 33 + 14 - 4 = 43 //$$

$$\begin{aligned} S_{100} &= (3+6+9+\cdots+99) + (7+14+21+\cdots+98) - (21+42+63+84) \\ &= \sum_{k=1}^{33} 3k + \sum_{k=1}^{14} 7k - \sum_{k=1}^4 21k \\ &= \frac{3}{2} \times 33 \times 34 + \frac{7}{2} \times 14 \times 15 - \frac{21}{2} \times 4 \times 5 = 2208 // \end{aligned}$$

次に、 $a_n = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ かつ $\frac{n}{3} - 1 < a_n \leq \frac{n}{3}$ であり、 $\frac{1}{3} - \frac{1}{n} < \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{3}$ であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{3} //$

また、 $b_n = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{21} \right\rfloor$ かつ

$$\left(\frac{n}{3} - 1\right) + \left(\frac{n}{7} - 1\right) - \frac{n}{21} < b_n < \frac{n}{3} + \frac{n}{7} - \left(\frac{n}{21} - 1\right) \Rightarrow \frac{3}{7} - \frac{2}{n} < \frac{b_n}{n} < \frac{3}{7} + \frac{1}{n}$$

はつまり $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = \frac{3}{7} //$

穴埋め問題 $C=2$ である。 (a_n, b_n) が 1 次のアステート

l を正の整数とし、 $n = 21l$ とする。

$$\begin{aligned} S_n &= (3+6+9+\cdots+21l) + (7+14+21+\cdots+21l) - (21+42+\cdots+21l) \\ &= \sum_{k=1}^{2l} 3k + \sum_{k=1}^{3l} 7k - \sum_{k=1}^l 21k \\ &= 3 \times \frac{1}{2} \times 2l(2l+1) + 7 \times \frac{1}{2} \times 3l(3l+1) - 21 \times \frac{1}{2} \times l(l+1) \\ &= \frac{3}{2}l \{ (2l+1) + (3l+1) - (l+1) \} \\ &= \frac{21}{2}l(9l+1) \end{aligned}$$

右辺 $(2l)^2 \leq n^2 < 21^2(l+1)^2$ かつ $\frac{\frac{21}{2}l(9l+1)}{21^2(l+1)^2} < \frac{a_n}{n^2} < \frac{\frac{21}{2}(l+1)(9l+10)}{(21l)^2}$ であり、 $\frac{3}{14} //$

$\left\lfloor \frac{n}{21} \right\rfloor = l$ である。 $21l \leq n < 21(l+1)$ であり、 $S_{21l} \leq S_n < S_{21(l+1)}$

よって $\frac{21}{2}l(9l+1) \leq S_n < \frac{21}{2}(l+1)(9l+10)$

$$= \frac{n(n-1)}{9} \sum_{(a', b', c') \in T} p'(a', b', c')$$

と表せるので、(3)の問題に与えられた式より、

$$\frac{n(n-1)}{9} \times 1 = \frac{n(n-1)}{9} \quad \dots\dots\dots[\text{答}]$$

(5) $|\vec{x}|^2$ の期待値 $E(|\vec{x}|^2)$ は

$$E\left(1-3\frac{t}{n^2}\right) = 1 - \frac{3}{n^2}E(t) = 1 - \frac{3}{n^2}E(ab+bc+ca)$$

$$= 1 - \frac{3}{n^2}\{E(ab)+E(bc)+E(ca)\}$$

$$= 1 - \frac{9}{n^2}E(ab)$$

$$= 1 - \frac{9}{n^2} \times \frac{n(n-1)}{9} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \quad \dots\dots\dots[\text{答}]$$

〈注意〉 小問の誘導が使えなかったときは、次のように帰納的に考えてもできる。

サイコロを n 回投げたときの \vec{x} を \vec{x}_n 、点 U, V, W のいずれかを確率 $\frac{1}{3}$ ずつでとる確率変数を X_{n+1} とする。

$E_n = E(|\vec{x}_n|^2)$ とおくと、

$$(n+1)^2 E_{n+1} = E(|(n+1)\vec{x}_{n+1}|^2)$$

$$= E(|n\vec{x}_n + \overrightarrow{OX_{n+1}}|^2)$$

$$= E(|n^2\vec{x}_n|^2 + 2n\vec{x}_n \cdot \overrightarrow{OX_{n+1}} + |\overrightarrow{OX_{n+1}}|^2)$$

$$= n^2 E(|\vec{x}_n|^2) + 2n E(\vec{x}_n) \cdot E(\overrightarrow{OX_{n+1}}) + E(|\overrightarrow{OX_{n+1}}|^2)$$

$$= n^2 E_n + 0 + 1$$

$E_1 = 1$ なので、漸化式を解くと、 $n^2 E_n = n$

$$\text{よって、} E_n = \frac{1}{n} \quad \dots\dots\dots[\text{答}]$$

平成 20 年 (2008)

【出題項目】 ① 数列の極限 ② 微分法の方程式への応用⁽¹⁾ ③ 軌跡と方程式 ④ 体積⁽²⁾

【ヒント】 ① 3 または 7 で割り切れる整数の中には、3 か 7 で割り切れる整数も含まれる。

② (3) $f'(x) = 0$ の解を α とするとき、 $f(\alpha)$ を直接計算すると時間がかかる。(2)を用いると楽。

③ (3)(4) l の g による像 $g(l)$ は、逆写像 g^{-1} による l の原像 $(g^{-1})^{-1}(l)$ であることが証明できる。

④ (3) 単純計算では泥沼にはまる。学校の教科書にある区分求積による体積の導出まで戻って発想する。

解 答

① [答] ア 33 イ 43 ウ 2208 エ $\frac{1}{3}$

オ $\frac{3}{7}$ カ 2 キ $\frac{3}{14}$

【解 説】 x 以下の最大の整数を $[x]$ で表す。

m を正の整数とすると、 n 以下の正の整数のうち m

で割り切れるものの個数は、 $\left[\frac{n}{m}\right]$ である。

$$\text{よって、} a_{100} = \left[\frac{100}{3}\right] = [33.3\cdots] = 33$$

3 または 7 で割り切れるものの個数は

(3 で割り切れるものの個数)

+ (7 で割り切れるものの個数)

− (3 と 7 で割り切れるものの個数)

で計算できる。

3 と 7 の最小公倍数は 21 だから、

(3 と 7 で割り切れる) \iff (21 で割り切れる)。

よって、

$$b_{100} = \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{7}\right] - \left[\frac{100}{21}\right] = 33 + 14 - 4 = 43$$

3 または 7 で割り切れるものの総和は、

(3 で割り切れるものの総和)

+ (7 で割り切れるものの総和)

− (3 と 7 で割り切れるものの総和)

で計算できる。よって、

$$S_{100} = (3+6+\cdots+99) + (7+14+\cdots+98)$$

$$- (21+42+63+84)$$

$$= \frac{102 \cdot 33}{2} + \frac{105 \cdot 14}{2} - 210 = 1683 + 735 - 210 = 2208$$

$$a_n = \left[\frac{n}{3}\right] \text{ だから、} \frac{n}{3} - 1 < a_n \leq \frac{n}{3}$$

$$\text{両辺を } n \text{ で割って、} \frac{1}{3} - \frac{1}{n} < \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{3}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ とすると、} \frac{1}{3} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{これは、} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{3} \text{ を意味する。}$$

$$b_n = \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{7}\right] - \left[\frac{n}{21}\right] \text{ だから、}$$

$$\left(\frac{n}{3} - 1\right) + \left(\frac{n}{7} - 1\right) - \frac{n}{21} < b_n < \frac{n}{3} + \frac{n}{7} - \left(\frac{n}{21} - 1\right)$$

$$\text{整理すると、} \frac{9n}{21} - 2 < b_n < \frac{9n}{21} + 1$$

$$\text{約分して、両辺を } n \text{ で割ると、} \frac{3}{7} - \frac{2}{n} < \frac{b_n}{n} < \frac{3}{7} + \frac{1}{n}$$

となる。 $n \rightarrow \infty$ とすると、はさみうち論法により、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = \frac{3}{7}$$

l を正の整数とする。 $n = 21l$ のとき、

$$\begin{aligned}
 S_n &= (3+6+\cdots+21l) + (7+14+\cdots+21l) \\
 &\quad - (21+42+\cdots+21l) \\
 &= \frac{(3+21l) \cdot 7l}{2} + \frac{(7+21l) \cdot 3l}{2} - \frac{(21+21l) \cdot l}{2} \\
 &= \frac{21l}{2} \{ (1+7l) + (1+3l) - (1+l) \} = \frac{21l(9l+1)}{2}
 \end{aligned}$$

$\left\lfloor \frac{n}{21} \right\rfloor = l$ とおくと, $21l \leq n < 21(l+1)$ である. S_n は n に関して広義単調増加だから, $S_{21l} \leq S_n \leq S_{21(l+1)}$ である. つまり,

$$\frac{21l(9l+1)}{2} \leq S_n \leq \frac{21(l+1)(9l+10)}{2}$$

$(21l)^2 \leq n^2 < \{21(l+1)\}^2$ だから,

$$\frac{21l(9l+1)}{2\{21(l+1)\}^2} < \frac{S_n}{n^2} \leq \frac{21(l+1)(9l+10)}{2(21l)^2}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $l \rightarrow \infty$ だから, はさみうち論法により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} = \frac{3}{14}$$

$c < 2$ のとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S_n}{n^2} \times n^{2-c} \right) = \frac{3}{14} \times \infty = \infty$$

$c > 2$ のとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S_n}{n^2} \times \frac{1}{n^{c-2}} \right) = \frac{3}{14} \times 0 = 0$$

以上より $c=2$

② (1) $f(x) = (x^2-1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ だから, $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$ である. よって, 2次方程式の解の公式から,

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3} \quad \dots\dots\dots[\text{答}]$$

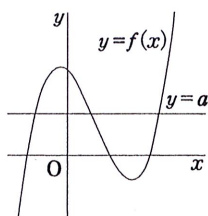
(2) 筆算で計算する.

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} \\
 3x^2 - 4x - 1 \overline{) x^3 - 2x^2 - x + 2} \\
 \underline{x^3 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x} \\
 -\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 2 \\
 \underline{-\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{2}{9}} \\
 -\frac{14}{9}x + \frac{16}{9}
 \end{array}$$

よって, 商は $\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$ [答]

余りは $-\frac{14}{9}x + \frac{16}{9}$ [答]

(3) $f(x) = a$ の異なる実数解の個数は, $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数に等しい. a が $f(x)$ の極値の間にあれば, 共有点は3個である. $f(x)$ の増減表をかくと,



x	...	$\frac{2-\sqrt{7}}{3}$...	$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大値	↘	極小値	↗

$$f(x) = f'(x) \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{9} \right) + \frac{-14}{9}x + \frac{16}{9} \quad \text{に } x = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$$

を代入すると, $f'\left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right) = 0$ であることから,

$$f\left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right) = 0 + \frac{-14}{9} \cdot \frac{2-\sqrt{7}}{3} + \frac{16}{9} = \frac{20+14\sqrt{7}}{27}$$

同様に, $x = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$ を代入して,

$$f\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{20-14\sqrt{7}}{27}$$

$$\text{ゆえに, } \frac{20-14\sqrt{7}}{27} < a < \frac{20+14\sqrt{7}}{27} \quad \dots\dots\dots[\text{答}]$$

③ (1) 定義より $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ [答]

$P(x, y)$, $R(X, Y)$ とおく. O を端点とする半直線 OP 上に点 R があることから,

$t \geq 0$ を用いて,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots ①$$

と表される.

$$|\overrightarrow{OR}| \cdot |\overrightarrow{OP}| = 1$$

$$\iff \sqrt{X^2 + Y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \quad \dots\dots\dots ②$$

$$\iff \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \iff t = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

である. これを①の式に代入して,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad \text{特に } P(x, y) = (2, 3) \text{ のとき,}$$

$$R(X, Y) = \left(\frac{2}{13}, \frac{3}{13} \right) \quad \dots\dots\dots[\text{答}]$$

$$(2) P=Q \iff (x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right) \iff \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=1 \end{cases}$$

$$\iff (x, y) = (\pm 1, \pm 1) \quad (\text{複号任意}) \quad \dots\dots\dots[\text{答}]$$

$$P=R \iff (x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

問題の条件より $(x, y) \neq (0, 0)$ なので,

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \dots\dots\dots[\text{答}]$$

(3) 直線 $l: x+2y=1$ から, 軸上の点 $(1, 0)$,

$\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を除いた図形を l' とする. 点 P が l' 上を動くときの点 Q の軌跡を $f(l')$ で表すことにする.

$$(X, Y) \in f(l')$$

$$\iff (X, Y) = f((x, y)) \text{ となる } (x, y) \in l' \text{ が存在する.}$$

$$\iff (X, Y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right) \text{ となる } x+2y=1 \text{ 上の点}$$

$$(x, y) \neq (1, 0), \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ が存在する.}$$