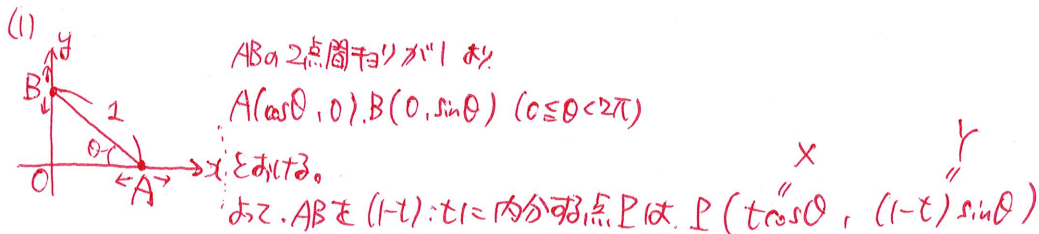


第9週 ①～③ 医学部合否決め問題演習

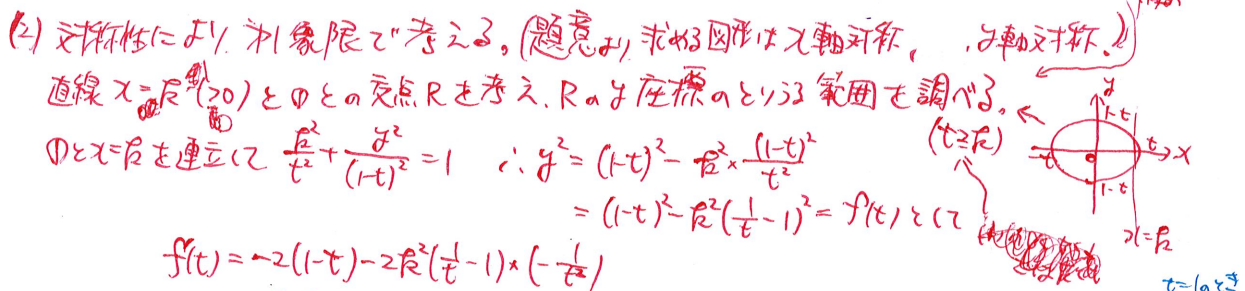
【入試演習 1】 (第9週 月曜分) (30分で完答にもってきたい)

xy平面において、長さが1である線分ABが、Aをx軸上に、Bをy軸上に置いて、動けるところすべてを動くものとする。

- (1)  $t$  を  $0 \leq t \leq 1$  なる定数とする。線分ABを  $(1-t):t$  に内分する点Pの軌跡を求めよ。
- (2) 線分AB(両端を含む)が通過する領域を、(1)の結果を利用して求め、図示せよ。
- (3)  $s$  を  $0 < s < 1$  なる定数とする。線分ABを  $(1-s):s$  に内分する点をQとしたとき、線分AQ(両端を含む)が通過する領域を求め、図示せよ。 (日本医科大)



Pの軌跡は、  
 $t=0$  のとき  $P(0, \sin \theta)$  より y 軸上の線分  $x=0 \quad (-1 \leq y \leq 1)$   
 $t=1$  のとき  $P(\cos \theta, 0)$  より x 軸上の線分  $y=0 \quad (-1 \leq x \leq 1)$   
 $0 < t < 1$  のとき  $\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{(1-t)^2} = 1$  であるから、



t	$r$	$\dots$	$r$	$\dots$	1
f(t)		+	0	-	/
f'(t)	0	/		\	0

$f(r^{\frac{2}{3}}) = (1-r^{\frac{2}{3}})^2 - r^2 (r^{\frac{2}{3}} - 1)^2$   
 $= (1-r^{\frac{2}{3}})^2 - r^{\frac{2}{3}} (1-r^{\frac{2}{3}})^2$   
 $= (1-r^{\frac{2}{3}})^3 \quad \therefore 0 \leq y^2 \leq (1-r^{\frac{2}{3}})^3 \dots \textcircled{3}$

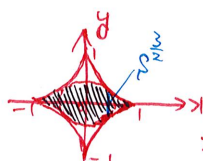
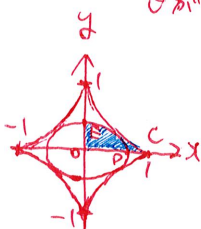
(3) 線分AQ上の点Pは、(1)で  $0 \leq t \leq 1$  と表され、

(2)の議論で  $t$  の範囲を  $r \leq t \leq 1$  かつ  $0 \leq t \leq 1$  とすればよい。

0かつ  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  を動くとき、Qはx軸上またはy軸上へ。

Aはx軸上と  $C \times y \cap A$ 。

よってAQは左図の銀色部分を動く。



境界含む。

(i)  $r^{\frac{2}{3}} \leq s$  のときは  
 $0 \leq t \leq 1$  で  $f(t)$  は単調減少するから  
 $0 \leq f(t) \leq f(s)$   
 (ii)  $0 \leq s < r^{\frac{2}{3}}$  のときは(2)と同様に  
 $0 \leq f(t) \leq f(r^{\frac{2}{3}}) = (1-r^{\frac{2}{3}})^3$

※※※※※ 解 答 ※※※※※

① 与式の両辺に  $2^{x+2}$  をかけて、

$$2^{3x+1} - 2^{2x} + 2 = 2^{x+2}$$

$t=2^x$  とおくと、 $t>0$  である。このとき、上の式を整理すると、

$$2t^3 - t^2 - 4t + 2 = 0 \iff 2t(t^2 - 2) - (t^2 - 2) = 0$$

$$\iff (2t-1)(t^2-2)=0 \iff t = \frac{1}{2}, \pm\sqrt{2}$$

$t>0$  だったので、 $t = \frac{1}{2}, \sqrt{2}$

よって、 $2^x = 2^{-1}, 2^{\frac{1}{2}} \therefore x = -1, \frac{1}{2}$  .....[答]

② (1) (a)  $m=1$  のとき、与式は  $a_1=1^3$  となる。

よって、 $a_1=1$

(b)  $m \geq 2$  のとき、まず与式を書き、その下に与式の  $m$  を  $m-1$  に置き換えた式を書く。

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1} + a_m = m^3$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1} = (m-1)^3$$

2式を辺々引いて、

$$a_m = m^3 - (m-1)^3 = 3m^2 - 3m + 1$$

この式の右辺は  $m=1$  を代入すると1になるので、

(a)の結果を含んでいる。

(a), (b)より  $a_m = 3m^2 - 3m + 1$  .....[答]

(2) 与式は、

$$\sum_{k=1}^n a_{2k} = \sum_{k=1}^n \{3(2k)^2 - 3(2k) + 1\} = \sum_{k=1}^n (12k^2 - 6k + 1)$$

$$= 12 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 6 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= 2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) + n$$

$$= n\{(n+1)(4n+2-3)+1\} = n(4n^2+3n)$$

$$= n^2(4n+3) \quad \text{.....[答]}$$

③ (1)  $\left(-\frac{1}{0}\right)$  から  $\overrightarrow{AB}$  へ時計回りに計った角を  $\theta$

( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) とおくと、

$A(\cos \theta, 0), B(0, \sin \theta)$  と

おける。

$P(x, y)$  とおくと、内分点の

公式より

$$(x, y) = (t \cos \theta, (1-t) \sin \theta)$$

(i)  $t=0$  のとき、 $x=0, y=\sin \theta$  である。

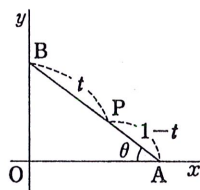
$-1 \leq \sin \theta \leq 1$  なので、点Pの軌跡はy軸上の2点  $(0, \pm 1)$  を結ぶ線分となる。

(ii)  $t=1$  のとき、 $x=\cos \theta, y=0$  である。

$-1 \leq \cos \theta \leq 1$  なので、点Pの軌跡はx軸上の2点  $(\pm 1, 0)$  を結ぶ線分となる。

(iii)  $0 < t < 1$  のとき、 $\cos \theta = \frac{x}{t}, \sin \theta = \frac{y}{1-t}$  である。2式の両辺を2乗して辺々加えると、

$$\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{(1-t)^2} = 1. \text{ この楕円がPの軌跡となる。}$$



(i), (ii), (iii)より、

$t=0$  のとき、 $(0, \pm 1)$  を結ぶ線分。(端点を含む)

$t=1$  のとき、 $(\pm 1, 0)$  を結ぶ線分。(端点を含む)

$0 < t < 1$  のとき、楕円  $\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{(1-t)^2} = 1$

.....[答]

(2) 上で求めた楕円または線分と、y軸に平行な直線  $x=x_0$  の共有点のy座標の値域を求める。

楕円または線分は

$-1 \leq x \leq 1$  の範囲に存在する。

•  $x_0=0$  のとき、 $t$  が  $0 \leq t \leq 1$  の範囲を動くとき、

$-1 \leq y \leq 1$  となることが、図を描くことにより分かる。

•  $x_0=\pm 1$  のときは、yの取り得る値は  $y=0$  のみであることが、図を描くことにより分かる。

•  $0 < |x_0| < 1$  のときは、次のようになる。

楕円または線分と直線  $x=x_0$  が共有点を持つ  $t$  の範囲は  $|x_0| \leq t$  である。

(1)の答より、 $y^2 = \left(1 - \frac{x_0^2}{t^2}\right)(1-t)^2$

である。この右辺を  $f(t)$  とおくと、

$$f'(t) = \frac{2x_0^2}{t^3}(1-t)^2 - 2\left(1 - \frac{x_0^2}{t^2}\right)(1-t)$$

$$= \left\{ \frac{2x_0^2}{t^3}(1-t) - 2\left(1 - \frac{x_0^2}{t^2}\right) \right\}(1-t)$$

$$= 2\left(\frac{x_0^2}{t^3} - 1\right)(1-t) \text{ となる。}$$

$f'(t)=0$  の解は  $t=x_0^{\frac{2}{3}}, 1$  である。 $|x_0| < |x_0|^{\frac{2}{3}} = x_0^{\frac{2}{3}}$  なので、増減表は、次のようになる。

$t$	$ x_0 $	...	$x_0^{\frac{2}{3}}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	0
$f(t)$	0	↗	$(1-x_0^{\frac{2}{3}})^3$	↘	0

この表より  $y^2$  の値域は  $0 \leq y^2 \leq (1-x_0^{\frac{2}{3}})^3$

となる。楕円や線分はx軸対称なので、yの値域は

$-(1-x_0^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \leq y \leq (1-x_0^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$  となる。

この式は、 $x_0=0, \pm 1$  のときにも成り立つ。

$x_0$  を動かしたときの、この線分の

通過範囲が答なので、 $x_0$  を  $x$

に置き換えて、整理すると、

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1 \quad \text{.....[答]}$$

(3) 線分AQ上の点は、線分ABの  $(1-t):t$

( $s \leq t \leq 1$ ) 内分点である。この範囲の  $t$  に対して、(2)

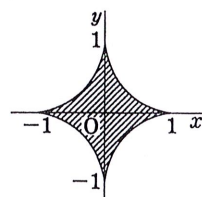
の  $f(t)$  の値域を調べ、yの値域を求めればよい。

前小問と同様、 $x_0=0$  のときは、 $-(1-s) \leq y \leq (1-s)$

となることが分かる。

また、 $x_0=\pm 1$  のときは、yの取り得る値は  $y=0$  のみであることが分かる。

$0 < |x_0| < 1$  のときは、次のようになる。





(a)  $s < x_0^{\frac{2}{3}} < 1$  のとき;  $s \leq |x_0|$  なら  $f(t)$  の増減表は下ようになる。

$t$	$x_0$	...	$x_0^{\frac{2}{3}}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	0
$f(t)$	0	↗	$(1-x_0^{\frac{2}{3}})^3$	↘	0

$|x_0| < s$  なら  $f(t)$  の増減表は下ようになる。

$t$	$s$	...	$x_0^{\frac{2}{3}}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	0
$f(t)$	$f(s)$	↗	$(1-x_0^{\frac{2}{3}})^3$	↘	0

いずれにしても  $y$  の値域は(2)と全く同じになる。

(b)  $x_0^{\frac{2}{3}} \leq s$  のとき;

$f(t)$  の増減表は右ようになる。

この場合は,  $y^2$  の値域は

$t$	$s$	...	1
$f'(t)$		-	0
$f(t)$	$f(s)$	↘	0

$$0 \leq y^2 \leq f(s) = \left(1 - \frac{x_0^2}{s^2}\right)(1-s)^2$$

となる。図形が  $x$  軸対称より,

$$-(1-s)\sqrt{1-\frac{x_0^2}{s^2}} \leq y \leq (1-s)\sqrt{1-\frac{x_0^2}{s^2}}$$

となる。 $x_0$  を動かしたときの, この線分の通過範囲が答なので,  $x_0$  を  $x$  に置き換えて, 整理すると,

$$\frac{x^2}{s^2} + \frac{y^2}{(1-s)^2} \leq 1$$

(a), (b) より

$$\left. \begin{array}{l} |x| > s^{\frac{3}{2}} \text{ のとき, } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1 \\ |x| \leq s^{\frac{3}{2}} \text{ のとき, } \frac{x^2}{s^2} + \frac{y^2}{(1-s)^2} \leq 1 \end{array} \right\} \dots\dots\dots \text{[答]}$$

④ (1)  $z$  軸と球面  $K$  の中心  $Q$  を通る平面で切った切り口を考える。

$xy$  平面の切り口を直線  $l$ ,  $Q$  から  $l$  へ下ろした垂線の足を  $H$  とおくと,  $K$  が  $T$  の側面に接することから, 接点を  $P$  とおく

$$PQ=1$$

$T$  の半径が 2 なので  $OH=1$

$K$  と  $S$  が共有点を持たないことから,  $OQ > 2$

三平方の定理から  $4 < OQ^2 = OH^2 + HQ^2$

よって,  $\sqrt{3} < HQ$

接点  $P$  が存在しない  $z$  座標の範囲は  $|z| \leq \sqrt{3}$  となる。

これは, 底面の半径 2, 高さ  $2\sqrt{3}\pi$  の円柱の側面なので, その面積は  $2\pi \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$  となる。……[答]

(2) (i)  $K$  の中心  $Q(t \cos \theta, t \sin \theta, s)$  から  $z$  軸へ下ろした垂線の足は  $A(0, 0, s)$  である。 $Q$  と  $z$  軸との距離が 1 より,  $t=1$  である。

よって,  $Q(\cos \theta, \sin \theta, s)$  となる。 $K$  と  $S'$  は共有点

をもたないことから,  $S'$  の中心  $(1, 0, 0)$  と  $Q$  の距離が半径和  $1+1$  より大きいので,

$$\sqrt{(\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta} + s^2 > 2$$

よって,

$$2 - 2 \cos \theta + s^2 > 4 \iff s^2 > 2 + 2 \cos \theta = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

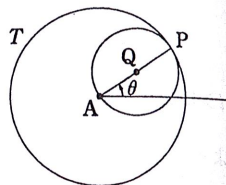
以上より,  $t=1, |s| > 2 \cos \frac{\theta}{2}$

……[答]

(ii) 接点を  $P$  とおく。

$A, Q, P$  が一直線上にあり,  $AP$  は  $T$  の半径 2 に等しいことから,

$P(2 \cos \theta, 2 \sin \theta, s)$  となる。……[答]



(iii)  $T$  の側面で,  $z$  座標  $s$  が  $|s| \leq 2 \cos \frac{\theta}{2}$  を満たす部分が問題の領域である。

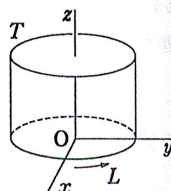
$T$  と  $xy$  平面の交わりの円周に沿って,  $(2, 0, 0)$  から  $\theta$  が増える方向を正の向きとして

はかった長さを  $L$  とおく。

$L=2\theta$  なので  $dL=2d\theta$

よって, 求める面積は,

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos \frac{\theta}{2} \cdot 2 d\theta &= 16 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 16 \left[ 2 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi} = 32 \end{aligned} \dots\dots\dots \text{[答]}$$



平成 19 年 (2007)

【出題項目】 ① 定積分で表された関数<sup>(2)</sup> ② 不等式と領域 ③ 最大・最小<sup>(2)</sup> ④ 期待値

【ヒント】 ① (1) いきなり積分計算をすると, 余分な労力を使う。どの部分が必要かを考えてから始める。(2) 対数の部分は, 問題に与えられた不等式を用いて挟み撃ちする。残りの部分は,  $a=0$  を代入するだけで出る。

② (1)  $a^2 + b^2$  の最小値を出せばよい。

(2)  $ab$  の下限が 0, つまり,  $0 < ab$  であり,  $ab$  はいくらでも 0 に近づく。このことから空集合と予想される。

③ 適当な変数を決めて, それで,  $T$  の面積を表す。

④ (1)  $|\vec{x}|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$  を用いて計算。

(2) 確率 =  $\frac{\text{条件を満たす場合の数}}{\text{全体的場合の数}}$  である。

(3) 確率の総和が 1 であることからすぐ出る。

(4) (期待値) =  $\sum (\text{値} \times \text{確率})$  である。

総和記号が具体的にどんな足し算かを手作業でつかみ, 確率の総和が 1 であることを用いる。

(5) (1) と (4) から直ちに出る。

第9週 ①～③ 医学部合否決め問題演習

✓ [入試演習 2] (第9週 月曜分) 15-20分2"

平面上に三角形 OAB があり, 3辺の長さは  $AB=5$ ,  $OA=6$ ,  $OB=7$  であるとする。

この三角形 OAB と正の数  $t$  に対して,  $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + \frac{1}{t}\overrightarrow{OB}$  をみたす点 P をとる。

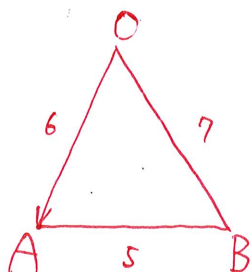
(1)  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \boxed{\phantom{00}}$  である。

(2)  $t$  が正の数全体を動くとき,  $|\overrightarrow{OP}|$  が最小値をとるような  $t$  の値を  $t_0$  とし,  $t=t_0$  の

ときの点 P を  $P_0$  とすれば  $t_0 = \frac{\sqrt{\boxed{\phantom{00}}}}{\boxed{\phantom{00}}}$ ,  $|\overrightarrow{OP_0}| = \boxed{\phantom{00}}$

である。さらに, 点  $P_0$  から直線 OA へ下ろした垂線を  $P_0H$  とすれば

$\overrightarrow{OH} = \frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}} \overrightarrow{OA}$  である。 ← えんぷソレベリ (お前だても) (東京医科大)



(1) 30 //

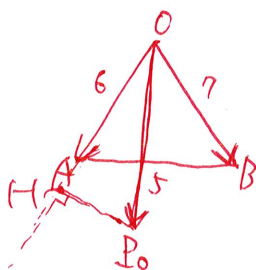
(2)  $|\overrightarrow{OP}|^2 = 36t^2 + \frac{49}{t^2} + 60$

$\geq 2\sqrt{36t^2 \times \frac{49}{t^2}} + 60$  (相加・相乗平均の関係より)

$= 2 \times 42 + 60 = 144$

$36t^2 = \frac{49}{t^2}$ , かつ  $t = \sqrt{\frac{7}{6}} = \frac{\sqrt{42}}{6}$  とき  $\min |\overrightarrow{OP}| = 12 //$

さらに,  $P_0$  から OA へおろした垂線の足 H について。



$\overrightarrow{OH} = r\overrightarrow{OA}$  ( $r$ : 実数) とおく

$\overrightarrow{OP_0} = r\overrightarrow{OA} - (t\overrightarrow{OA} + \frac{1}{t}\overrightarrow{OB})$

$= (r-t)\overrightarrow{OA} - \frac{1}{t}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OP_0H}$  より

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OA} \cdot \{(r-t)\overrightarrow{OA} - \frac{1}{t}\overrightarrow{OB}\}$

$= (r-t) \times 36 - \frac{30}{t} = 0$

$36r = 36t + \frac{30}{t}$   
 $r = t + \frac{5}{6t}$

$= \frac{6t+5}{6t}$

$= \frac{6 \times \frac{7}{6} + 5}{6 \times \frac{\sqrt{42}}{6}}$

$= \frac{12}{\sqrt{42}}$

$= \frac{2\sqrt{42}}{7}$

$\therefore \overrightarrow{OH} = \frac{2\sqrt{42}}{7} \overrightarrow{OA} //$

(別解)

$\overrightarrow{OH} = (\overrightarrow{OP_0} \cdot \frac{1}{6}\overrightarrow{OA}) \times \frac{1}{6}\overrightarrow{OA}$   
 $= \frac{(t\overrightarrow{OA} + \frac{1}{t}\overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OA}}{36} \overrightarrow{OA}$

$= \frac{36t + \frac{30}{t}}{36} \overrightarrow{OA}$

$= (t + \frac{5}{6t}) \overrightarrow{OA}$

$= \frac{2\sqrt{42}}{7} \overrightarrow{OA} //$



$$=\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^{9n}$$

$$=\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left\{ \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \right\}^{18}$$

$$=\log e^{18} = 18$$

⑨ [答] アイ 17 ウ 8 エオ 31 カキ 64

ク 1 ケ 4

解 説  $\begin{cases} f(x) = (x-a)^2 + b \\ g(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

$f'(x) = 2(x-a)$ ,  $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$  であるから, 条件

$$\begin{cases} f(2) = g(2) \\ f'(2) = g'(2) \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} (2-a)^2 + b = \frac{1}{2} & \dots\dots\dots ① \\ 2(2-a) = -\frac{1}{4} & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

②より,  $2-a = -\frac{1}{8} \quad \therefore a = \frac{17}{8}$

これを①に代入して  $b$  の値を求めると,

$$b = \frac{31}{64}$$

このとき,

$$f(x) = \left( x - \frac{17}{8} \right)^2 + \frac{31}{64}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

を連立すると,

$$\left( x - \frac{17}{8} \right)^2 + \frac{31}{64} = \frac{1}{x}$$

$$x^3 - \frac{17}{4}x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$(x-2)\left(x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$(x-2)^2(4x-1) = 0$$

よって,  $f(x) = g(x)$  をみたす  $x$  の値は,

$$x = 2, \quad \frac{1}{4}$$

⑩ [答] アイ 30 ウエ 42 オ 6 カキ 12

ク 2 ケコ 42 サ 7

解 説 (1)  $AB=5$ ,  $OA=6$ ,  $OB=7$  より,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2} = 30$$

(2)  $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + \frac{1}{t}\overrightarrow{OB}$ ,  $|\overrightarrow{OA}|=6$ ,  $|\overrightarrow{OB}|=7$  であるから,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}|^2 &= \left| t\overrightarrow{OA} + \frac{1}{t}\overrightarrow{OB} \right|^2 \\ &= t^2|\overrightarrow{OA}|^2 + 2t\overrightarrow{OA} \cdot \frac{1}{t}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{t^2}|\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= 36t^2 + 2 \cdot 30 + \frac{49}{t^2} \\ &= 36t^2 + \frac{49}{t^2} + 60 \end{aligned}$$

$$\geq 2\sqrt{36t^2 \cdot \frac{49}{t^2}} + 60 = 144$$

ここで, 等号が成立するのは,

$$36t^2 = \frac{49}{t^2} \iff t^4 = \frac{49}{36} \iff t^2 = \frac{7}{6}$$

$t$  は正の実数であるから,

$$t = \sqrt{\frac{7}{6}} = \frac{\sqrt{42}}{6}$$

よって,  $|\overrightarrow{OP}|$  が最小となるときの  $t$  の値  $t_0$  と, 最小値  $|\overrightarrow{OP}_0|$  は,

$$t_0 = \frac{\sqrt{42}}{6}, \quad |\overrightarrow{OP}_0| = 12$$

さらに, 点  $P_0$  から直線  $OA$  に下ろした垂線の足が  $H$  であり,  $\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{OA}$  と表せる (ただし,  $k$  は実数).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HP}_0 &= \left( t_0\overrightarrow{OA} + \frac{1}{t_0}\overrightarrow{OB} \right) - k\overrightarrow{OA} \\ &= (t_0 - k)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{t_0}\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

$HP_0$  は  $OA$  に垂直であるから,  $\overrightarrow{HP}_0 \cdot \overrightarrow{OA} = 0$  であり,

$$\overrightarrow{HP}_0 \cdot \overrightarrow{OA} = \left\{ (t_0 - k)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{t_0}\overrightarrow{OB} \right\} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

$$(t_0 - k)|\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{1}{t_0}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$t_0 = \frac{\sqrt{42}}{6}, \quad |\overrightarrow{OA}| = 6, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 30 \quad \text{より,}$$

$$36\left(\frac{\sqrt{42}}{6} - k\right) + \frac{6}{\sqrt{42}} \cdot 30 = 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{42}}{6} - k\right) + \frac{5}{\sqrt{42}} = 0$$

$$k = \frac{\sqrt{42}}{6} + \frac{5}{\sqrt{42}} = \frac{2\sqrt{42}}{7}$$

よって,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{2\sqrt{42}}{7}\overrightarrow{OA}$$

研究  $\overrightarrow{OH}$  は  $\overrightarrow{OP}_0$  の  $\overrightarrow{OA}$  への正射影ベクトルであり, 解答と同様に考えることにより,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}_0}{|\overrightarrow{OA}|^2} \overrightarrow{OA}$$

が得られる. この式を利用して直接求めることもできる.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}_0}{|\overrightarrow{OA}|^2} \overrightarrow{OA} = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \left\{ t_0\overrightarrow{OA} + \frac{1}{t_0}\overrightarrow{OB} \right\}}{|\overrightarrow{OA}|^2} \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{t_0|\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{1}{t_0}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|^2} \overrightarrow{OA} = \frac{2\sqrt{42}}{7}\overrightarrow{OA} \end{aligned}$$

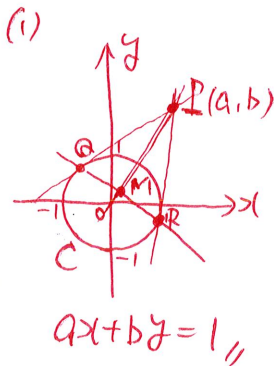
第9週 ①～③ 医学部合否決め問題演習

✓ [演習 - 1] (第9週 月曜分) (5分)

xy 平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円を  $C$  とし、この円  $C$  の外部にある点  $P(a, b)$  を考える。点  $P$  から円  $C$  に 2 つの接線を引き、その接点をそれぞれ  $Q, R$  とし、線分  $QR$  の中点を  $M$  とする。このとき、次の各問いに答えよ。

- ・ (1)  $a, b$  を用いて直線  $QR$  の方程式を示せ。
- (2)  $a, b$  を用いて直線  $MP$  の方程式を示せ。
- (3)  $a, b$  を用いて点  $M$  の座標を示せ。
- (4) 点  $M$  の座標を  $(p, q)$  とするとき、点  $P$  の座標  $(a, b)$  は  $p, q$  を用いてどのように表されるか。
- (5) 円  $C$  の外部にある点  $P$  が、 $(x-y)\left(x-\frac{1}{2}\right) < 0$  を満たす範囲にあるとき、点  $M$  の存在する範囲を図示せよ。

(兵庫医科大)



(2)  $OQ = OR$  より  $\triangle OQR$  は二等辺三角形で、 $M$  は  $QR$  の中点より  $OM \perp QR$  ... ①  
同様に  $PQ = PR$  より  $PM \perp QR$  ... ②  
①、②より直線  $MP$  は直線  $OP$  である。  
( $O, M, P$  は同一直線上)  
 $\therefore (x, y) = t(a, b) \dots ③$   
( $t$ : 実数)  
 $bx - ay = 0 //$

(3) ③を  $ax + by = 1$  に代入  
 $t = \frac{1}{a^2 + b^2}$   
 $\therefore M\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2}\right) //$

(4)  $p = \frac{a}{a^2 + b^2}, q = \frac{b}{a^2 + b^2}$  だと  
 $p^2 + q^2 = \frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}$   
 $= \frac{1}{a^2 + b^2} \dots (*)$   
 $\therefore a^2 + b^2 = \frac{1}{p^2 + q^2}$

④より  $P(a, b) = (pa^2b^2, qa^2b^2)$   
 $= \left(\frac{p}{p^2 + q^2}, \frac{q}{p^2 + q^2}\right) //$

(別解)  $(*)$  より  $|OQ| |OM| = 1$

$\therefore \vec{OP} = \frac{|OQ|}{|OM|} \vec{OM}$   
 $= \frac{|OQ| |OM|}{|OM|^2} \vec{OM}$   
 $= \frac{1}{p^2 + q^2} (p, q)$   
と、

(5)  $(a-b)\left(a-\frac{1}{2}\right) < 0$

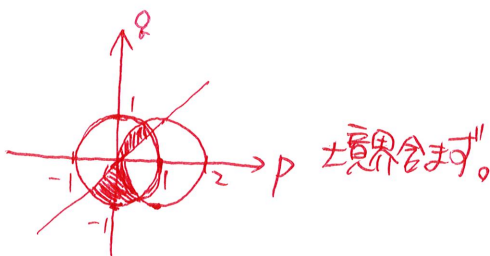
(4) の結果を代入して

$$\frac{p-q}{p^2+q^2} \left( \frac{p}{p^2+q^2} - \frac{1}{2} \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow (p-q) \{ 2p - (p^2 + q^2) \} < 0$$

$$\Leftrightarrow (p-q)(p - 1)^2 + q^2 - 1 > 0 \leftarrow \begin{matrix} \text{(下から外)} \\ \text{(上から中)} \end{matrix}$$

$M$  が  $C$  の内部で存在し、これに注意して





と  $m$  の奇偶が異なることに注意して計算すると右表を得る。よって、

$m$	1	3	8	24
$n+1$	2004	667	247	72

$$2004 = 667 + 668 + 669$$

$$= 247 + 248 + \dots + 254 = 72 + 73 + \dots + 95$$

登場する自然数の中で最小のものは 72 .....[答]

(2)  $2^x = 6^y = 81$  の各辺に  $\log_3$  をつけると、

$$x \log_3 2 = y \log_3 6 = \log_3 81 = 4$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{\log_3 2}{4} - \frac{\log_3 6}{4} = -\frac{\log_3 3}{4} = -\frac{1}{4} \quad \dots\dots\dots[答]$$

(3) 問題の図形は右図斜線部である。交点の  $x$  座標は、

$$x^2 - 1 - (2ax - a^2) = 0 \text{ より}$$

$$x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$$

$$\iff (x - a + 1)(x - a - 1) = 0$$

$$\iff x = a \pm 1 \text{ いわゆる } \frac{1}{6} \text{ 公式より、}$$

$$S = \frac{1}{6} \{(a+1) - (a-1)\}^3 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad \dots\dots\dots[答]$$

$$(4) w = \frac{1-6z}{1+2z} \text{ より } w(1+2z) = 1-6z$$

$$z \text{ で整理して } (2w+6)z = -w+1$$

$$\therefore z = \frac{-w+1}{2w+6} \quad \dots\dots\dots①$$

$z$  は原点中心で半径 1 の円周上を動くので、 $|z|=1$

①の両辺の絶対値を考えて、

$$1 = \left| \frac{-w+1}{2w+6} \right| \iff 2|w+3| = |w-1|$$

$w = x + yi$  ( $x, y$  は実数,  $i = \sqrt{-1}$ ) とおくと、上式は、

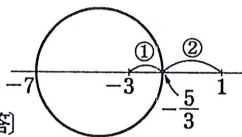
$$2\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$\iff 4(x^2 + 6x + 9 + y^2) = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

$$\iff 3x^2 + 26x + 35 + 3y^2 = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{13}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{64}{9}$$

$$\text{よって、半径は } \frac{8}{3} \quad \dots\dots\dots[答]$$



**別解**  $2|w+3| = |w-1|$  より  $w$  と 1 の距離は  $w$  と  $-3$  の距離の 2 倍である。2 定点からの距離の比が一定となる動点の軌跡は円である。  $-3$  と 1 の 1:2 外分点は  $-7$ 、1:2 内分点は  $-\frac{5}{3}$  である。この 2 点

が直径の両端となるので、半径は  $\frac{8}{3}$

(5) 全部で  $2^8 = 256$  通りある。1 から 8 までのうち、異なる整数をいくつか足して 10 になる方法は、 $2+8$ ,  $3+7$ ,  $4+6$ ,  $1+2+7$ ,  $1+3+6$ ,  $1+4+5$ ,  $2+3+5$ ,  $1+2+3+4$  の 8 通りである。  $\frac{8}{256} = \frac{1}{32}$  .....[答]

② (1)  $t = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right)$

$$= \sqrt{2} (\cos 45^\circ \cos x - \sin 45^\circ \sin x)$$

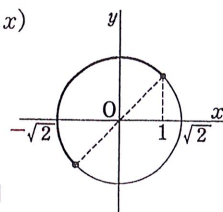
$$= \sqrt{2} \cos(x + 45^\circ)$$

問題より  $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$  なので、

$$45^\circ \leq x + 45^\circ \leq 225^\circ$$

$$\text{よって、} -\sqrt{2} \leq t \leq 1$$

.....[答]



$$(2) t^2 = (\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2 \cos x \sin x$$

$$\text{よって、} 2 \cos x \sin x = 1 - t^2$$

$$f(x) = 2(\cos^3 x - \sin^3 x) + 8 \cos x \sin x - 1$$

$$= (\cos x - \sin x)(2 \cos^2 x + 2 \cos x \sin x + 2 \sin^2 x)$$

$$+ 8 \cos x \sin x - 1$$

$$= t(2 + (1 - t^2)) + 4(1 - t^2) - 1 = -t^3 - 4t^2 + 3t + 3$$

$$\text{よって、} g(t) = -t^3 - 4t^2 + 3t + 3 \quad \dots\dots\dots[答]$$

(3)  $g'(t) = -3t^2 - 8t + 3 = -(3t-1)(t+3)$  より、 $g(t)$  が極値をとる  $t$  の値、つまり、 $g'(t)$  の符号が変化する

$t$  の値は  $t = -3, \frac{1}{3}$  このうち、(1)で求めた範囲に含まれるのは、 $t = \frac{1}{3}$  .....[答]

(4)  $g(t) (-\sqrt{2} \leq t \leq 1)$  の増減表は以下のようになる。

$t$	$-\sqrt{2}$	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	$-5 - \sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{95}{27}$	$\searrow$	1

よって、 $g(t)$  の最大値は  $g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{95}{27}$  .....[答]

$g(t)$  の最小値は  $g(-\sqrt{2}) = -5 - \sqrt{2}$  .....[答]

③ (1)  $Q(x_0, y_0)$ ,  $R(x_1, y_1)$  とおく。

$Q$  における円  $C: x^2 + y^2 = 1$  の接線  $x_0x + y_0y = 1$  が、点  $P(a, b)$  を通ることから、

$$ax_0 + by_0 = 1 \quad \dots\dots\dots①$$

点  $R$  における円  $C$  の接線  $x_1x + y_1y = 1$  が、点  $A$  を通ることから、 $ax_1 + by_1 = 1$  .....②

①, ②より 2 点  $Q, R$  は、直線  $ax + by = 1$  上に乗っている。よって、直線  $QR$  は  $ax + by = 1$  .....[答]

(2) まず、 $O, M, P$  が一直線上にあることを示す。

$\triangle OQR$  は  $OQ = OR$  を満たす

二等辺三角形なので、 $OM \perp QR$

となる。また、 $\triangle PQR$  は

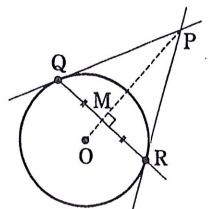
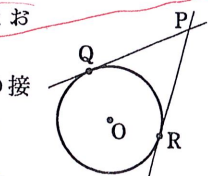
$PQ = PR$  を満たす二等辺三角形なので、 $PM \perp QR$  となる。

よって、 $O, M, P$  は一直線上にある。直線  $MP$  の式は直線  $OP$

の式に等しく、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = at \\ y = bt \end{cases} \quad \dots\dots\dots③$$

パラメータ  $t$  を消去すると、 $bx - ay = 0$  .....[答]



(3) ③を直線 QR の式  $ax+by=1$  に代入して,  
 $a(at)+b(bt)=1 \iff t=\frac{1}{a^2+b^2}$  これを③に代入

して  $M\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}\right)$  .....[答]

(4)  $M(p, q)$  とおくと, (3)より

$$p=\frac{a}{a^2+b^2} \text{ かつ } q=\frac{b}{a^2+b^2} \text{ .....④}$$

$$p^2+q^2=\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{1}{a^2+b^2}$$

$$\text{よって, } a^2+b^2=\frac{1}{p^2+q^2}$$

④より  $P(a, b)=(p(a^2+b^2), q(a^2+b^2))$   
 $=\left(\frac{p}{p^2+q^2}, \frac{q}{p^2+q^2}\right)$  .....⑤ [答]

(5)  $(a-b)\left(a-\frac{1}{2}\right)<0$

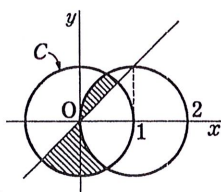
に⑤を代入すると,

$$\frac{p-q}{p^2+q^2}\left(\frac{p}{p^2+q^2}-\frac{1}{2}\right)<0$$

$$\iff (p-q)\{2p-(p^2+q^2)\}<0$$

$$\iff (p-q)\{(p-1)^2+q^2-1\}>0$$

M が円 C の内部の点であることに注意すると, 答えは右図斜線部になる. 境界は含まない.



④ (1) 球面 S 上の点を  $(x, y, z)$  とおく. 球面の定義より, 2 点  $P(5, 4, 2)$  と  $(x, y, z)$  との距離は 7 で一定である. 2 点間の距離の公式より

$$\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2+(z-2)^2}=7 \text{ 両辺を 2 乗して}$$

$$(x-5)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=49 \text{ .....[答]}$$

(2) O を端点とする半直線 OQ 上の点を  $(x, y, z)$  と

$$\text{おくと } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\vec{a} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$(t \geq 0)$  .....① と表される.

これを, (1) で求めた球面の式に代入して,

$$(t-5)^2+(t-4)^2+(-2t-2)^2=49$$

$$\iff 6t^2-10t-4=0 \iff (t-2)(6t+2)=0$$

$\iff t=2, -\frac{1}{3}$  このうち  $t \geq 0$  のものは  $t=2$  である. ①に代入して,  $Q(2, 2, -4)$  .....[答]

(3) 直線 PQ 上の点を  $(x, y, z)$  とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{OQ} + t\vec{QP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

と表される. N が直線 PQ 上の点であることに留意すると  $\vec{QP} \perp \vec{ON}$  から,

$$\vec{QP} \cdot \vec{ON} = 0 \iff \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\iff -14+49t=0 \iff t=\frac{2}{7} \text{ よって,}$$

$$\vec{QN} = \vec{ON} - \vec{OQ} = t\vec{QP} = \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ .....[答]}$$

$$(4) \vec{QO} + \vec{QM} = 2\vec{QN} \text{ より } \vec{QM} = \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(5) 直線 QM 上の点を  $(x, y, z)$  とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ .....②}$$

と表される. R は直線 QM 上の点であるから, この式と(1)で求めた球面 S の式を連立して,

$$(13t-3)^2+(11t-2)^2+(-2t-6)^2=49$$

$$\iff 294t^2-98t+49=49 \iff (3t-1)t=0$$

$$\iff t=0, \frac{1}{3} \text{ を得る. } t=0 \text{ のとき②は } Q \text{ になるの}$$

$$\text{で, } R \text{ は } t=\frac{1}{3} \text{ のときで, } \vec{OR} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 19 \\ 17 \\ -14 \end{pmatrix} \text{ .....[答]}$$

## 平成 17 年 (2005)

【出題項目】 ① (1) 場合の数 (2) 常用対数 (3) 三角比の空間図形への応用 (4) 複素数と図形 (5) 関数の極限(2) (6) 軌跡と方程式 ② 数学的帰納法

③ 面積(2) ④ 条件つき確率と乗法定理

【ヒント】 ① (1) 千の位は 0 になれない.

(2) 素因数 2, 3, 5, 7 からなる整数の不等式を最初で作る.

(3) 余弦定理を 2 回使う. まず, EA, ED を出す.

(4) 数 II では, 傾きを  $\tan$  とみなし, 加法公式を用いて方程式を出すのが普通の方法である.

(5) 極限が有界かつ (分母)  $\rightarrow 0$  なら (分子)  $\rightarrow 0$

(6) いわゆるアポロニウスの円の問題.

② (3)  $3, 2, \frac{5}{3}, \dots$  から, 一般項を予想する勘が必要.

③ (5)  $\frac{1}{6}$  公式,  $\frac{1}{12}$  公式などを活用すると一瞬.

## 解 答

① [答] (1) 729 (2) 4 (3)  $\frac{5}{13}$  (4) -2 (5)  $\frac{7}{2}$

(6)  $6\sqrt{2}$

【解説】 (1) 問題の整数を  $abbc$  とおく.  $a$  は 1~9 の 9 通り.  $b$  は 0~9 のうち  $a$  以外の 9 通り.  $c$  も 0~9 のうち  $b$  以外の 9 通り.

以上より  $9^3=729$  通り.

(2)  $48 < 49 < 50$  より  $2^4 \cdot 3 < 7^2 < \frac{10^2}{2}$



第9週 ①～③ 医学部合否決め問題演習

〔演習－2〕 (第9週 月曜分) (12分)

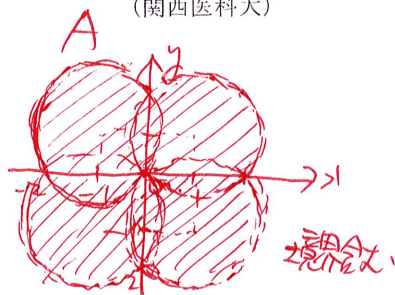
不等式  $x^2 + y^2 \leq 2(|x| + |y|)$  の表す領域を  $A$  とする。また、不等式  $|x| + |y| \leq k$  (ただし、 $k > 0$ ) の表す領域を  $B$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $(x, y)$  平面で領域  $A$  を斜線部で図示せよ。また  $A$  の面積を求めよ。
- (2)  $k=2$  のとき領域  $B$  を斜線部で図示せよ。
- (3)  $A \subset B$  となる  $k$  の最小値を求めよ。
- (4)  $A \supset B$  となる  $k$  の最大値を求めよ。

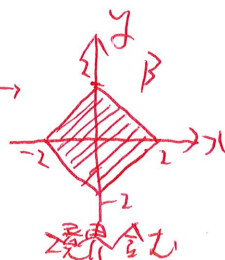
(関西医科大学)

$$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} x \geq 0 \text{ かつ } y \geq 0 \text{ のとき } (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \\ x \geq 0 \text{ かつ } y < 0 \text{ のとき } (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2 \\ x < 0 \text{ かつ } y \geq 0 \text{ のとき } (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \\ x < 0 \text{ かつ } y < 0 \text{ のとき } (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

半径  $\sqrt{2}$  より、 $(\pi \times \sqrt{2}^2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 2^2) \times 4 = 4\pi + 8$



(2)  $k=2$  のとき  $|x| + |y| \leq k$  (1)と同様の考えをして、→



(3)  $A \subset B$  とするには、 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$  かつ  $x+y-k=0$  と接するとき、 $\frac{|1+1-k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \rightarrow |k-2| = 2$   
 $k=4$  (最大値)

(4)  $A \supset B$  とするには、 $k \leq 2$

$$n=2 \text{ のときは, } 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} < \frac{85}{100}$$

$$n=3 \text{ のときは, } 1 - \frac{6}{9} = \frac{1}{3} < \frac{85}{100}$$

$$n=4 \text{ のときは, } 1 - \frac{14}{27} = \frac{13}{27} < \frac{85}{100}$$

よって,  $n \geq 5$  のときを調べればよい.

$$1 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} \geq \frac{85}{100} \text{ とすると,}$$

$$\frac{2^n - 2}{3^{n-1}} \leq \frac{15}{100} \quad \therefore \frac{2^n - 2}{3^n} \leq \frac{5}{100}$$

$$\therefore \frac{2^n}{3^n} \leq \frac{5}{100} + \frac{2}{3^n} < \frac{5}{100} + 2 \cdot \frac{5}{1000} = \frac{6}{100}$$

$$\therefore \log_{10} \left( \frac{2}{3} \right)^n \leq \log_{10} \frac{6}{100}$$

$$n(\log_{10} 2 - \log_{10} 3) \leq \log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 2$$

$$n \geq \frac{2 - \log_{10} 2 - \log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} = \frac{2 - 0.3010 - 0.4771}{0.4771 - 0.3010} = 6.9 \dots$$

そこで,

$$n=7 \text{ のとき } 1 - \frac{2^7 - 1}{3^6} = 1 - \frac{126}{729} = \frac{603}{729} = 0.82 \dots$$

$$n=8 \text{ のとき } 1 - \frac{2^8 - 1}{3^7} = 1 - \frac{255}{2187} = \frac{1932}{2187} = 0.88 \dots$$

よって, 「あいこ」の確率が  $\frac{85}{100}$  以上となる最小の整

数  $n$  は,  $n=8$

⑧ (1) (i)  $x \geq 0$  かつ  $y \geq 0$  のとき

$$x^2 + y^2 \leq 2(x+y) \quad \therefore (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$$

(ii)  $x \geq 0$  かつ  $y \leq 0$  のとき

$$x^2 + y^2 \leq 2(x-y)$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

(iii)  $x \leq 0$  かつ  $y \geq 0$  のとき

$$x^2 + y^2 \leq 2(-x+y)$$

$$\therefore (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$$

(iv)  $x \leq 0$  かつ  $y \leq 0$  のとき

$$x^2 + y^2 \leq 2(-x-y)$$

$$\therefore (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

A の面積は

$$4 \times \left( \pi \cdot (\sqrt{2})^2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right) = 4\pi + 8 \quad \dots\dots\dots[\text{答}]$$

(2) (i)  $x \geq 0$  かつ  $y \geq 0$  のとき

$$x+y \leq k \quad \therefore y \leq -x+k$$

(ii)  $x \geq 0$  かつ  $y \leq 0$  のとき

$$x-y \leq k \quad \therefore y \geq x-k$$

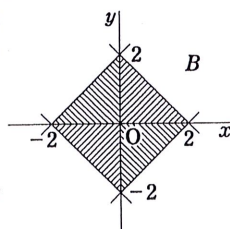
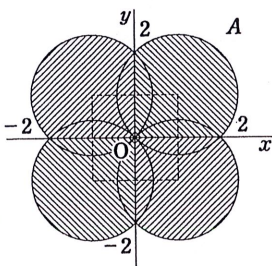
(iii)  $x \leq 0$  かつ  $y \geq 0$  のとき

$$-x+y \leq k \quad \therefore y \leq x+k$$

(iv)  $x \leq 0$  かつ  $y \leq 0$  のとき

$$-x-y \leq k \quad \therefore y \geq -x-k$$

よって,  $k=2$  のときを図示すると上のようになる.



(3)  $A \subset B$  となるための条件は

$$2\sqrt{2} \leq \frac{k}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore k \geq 4$$

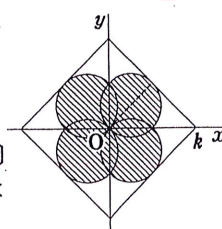
よって,  $k$  の最小値は 4 …[答]

(4)  $A \supset B$  となるための条件は

$$k \leq 2$$

よって,  $k$  の最大値は 2

………[答]



$$\textcircled{4} (1) f(0) = \frac{1}{1 + \tan^3 0} = 1 \quad \dots\dots\dots[\text{答}]$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{1 + \tan^3 \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots[\text{答}]$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^3 x}$$

$$= 0$$

………[答]

(3)  $y=f(x)$  上の点  $(x, y)$  の, 点  $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$  に関する対称点を  $(X, Y)$  とすると,

$$\frac{x+X}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{かつ} \quad \frac{y+Y}{2} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} - X \quad \text{かつ} \quad y = 1 - Y$$

これらを  $y=f(x)$  に代入すると,

$$1 - Y = \frac{1}{1 + \tan^3 \left( \frac{\pi}{2} - X \right)}$$

$$= \frac{1}{1 + \left( \frac{1}{\tan X} \right)^3}$$

$$= \frac{\tan^3 X}{\tan^3 X + 1}$$

$$\therefore Y = 1 - \frac{\tan^3 X}{\tan^3 X + 1} = \frac{1}{\tan^3 X + 1}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^3 X}$$

よって, 求める曲線の方程式は

$$y = \frac{1}{1 + \tan^3 x}$$

………[答]

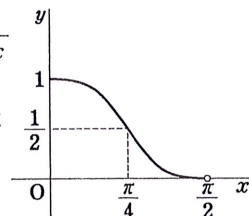
(4) 対称性より  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  で調べればよい.

$$f'(x) = -\frac{1}{(1 + \tan^3 x)^2} \times 3 \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= -\frac{3 \tan^2 x}{(1 + \tan^3 x)^2 \cos^2 x}$$

$$\leq 0$$

よって,  $y=f(x)$  のグラフは右のようになる.



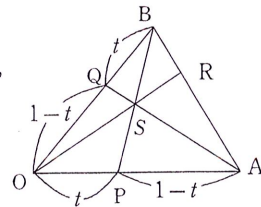


## [演習-3]

(20分)

△OABにおいて辺OAを $t:1-t$ に内分する点をP,辺OBを $1-t:t$ に内分する点をQとする。ただし、 $0 < t < 1$ である。さらに、線分AQとBPの交点をSとし、

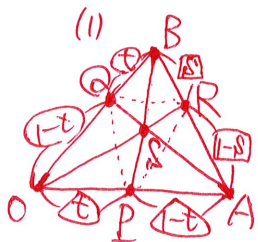
直線OSの延長線と辺ABの交点をRとする。

 $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$  として次の問いに答えよ。(1)  $\vec{OS}$  を  $t$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。(2) 点Rが線分BAを $s:1-s$  ( $0 < s < 1$ ) に内分するとき、 $t$  を用いて  $s$  を表せ。(3)  $t$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて  $\vec{OR}$  を表せ。(4) △OABの面積に対する△PQRの面積比を、 $t$  を用いて表せ。

(5) 点P, 点Qが、それぞれ辺OAと辺OB上を動くとき、(4)で求めた比の最大値は

いくらになるか

(兵庫医科大)



△OAQとBPについて

X座標の定理より

$$\frac{OP}{PA} \times \frac{AS}{SQ} \times \frac{QB}{BO} = 1$$

$$\therefore \frac{t}{1-t} \times \frac{AS}{SQ} \times \frac{t}{1} = 1$$

$$\therefore AS:SQ = (1-t):t^2$$

$$\therefore \vec{OS} = \frac{t^2 \vec{OA} + (1-t) \vec{OB}}{(1-t) + t^2}$$

$$= \frac{t^2 \vec{a} + (1-t) \vec{b}}{1-t+t^2} //$$

$$(2) \vec{OR} = s \vec{a} + (1-s) \vec{b} \text{ かつ } \vec{OR} = R \vec{OS} \text{ (R:実数)}$$

$$\therefore s:(1-s) = t^2:(1-t)^2$$

$$\therefore (1-s)t^2 = s(1-t)^2$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{t^2}{2t^2 - 2t + 1} //$$

$$(3) (2) \text{より} \vec{OR} = \frac{t^2 \vec{a} + (1-t)^2 \vec{b}}{2t^2 - 2t + 1} //$$

(4) 面積に関して

$$\frac{(\triangle PQR)}{(\triangle OAB)} = 1 - \frac{(\triangle OPQ) + (\triangle APR) + (\triangle BQR)}{(\triangle OAB)}$$

$$= 1 - \{t(1-t) + (1-s)(1-t) + st\}$$

$$= t^2 - (1-2t)s$$

$$= \frac{2t^2(1-t)^2}{2t^2 - 2t + 1} \quad (2121)$$

$$(5) f(t) = \frac{2t^2(1-t)^2}{2t^2 - 2t + 1} \text{ とおく (} 0 < t < 1 \text{)}$$

$$f'(t) = \frac{\{4t(1-t) + 4t^2(-1)\}(2t^2 - 2t + 1) - \dots}{(2t^2 - 2t + 1)^2}$$

=

$$= \frac{4t(1-2t)(1-t)(1-t+t^2)}{(2t^2 - 2t + 1)^2} \approx 0 \text{ かつ } t = \frac{1}{2} \rightarrow \text{最大値}$$

t	0	-	1/2	-	1
f'(t)	/	+	0	-	/
f(t)	/	↑	1/4	↓	/

1/4 //

(d)  $f(3) = -5 < 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right) = +\infty$  より、方程式  $f(x) = 0$  は  $\alpha > 3$  となる実数解  $\alpha$  をもつ。

(e)  $f(4) = 64 - 80 + 12 + 4 = 0$  より  $\alpha = 4$  .....[答]

(2) (f)  $g(x) = px^2 + qx + r$  は  $x = \frac{15}{8}$  で極大値をもつ

から、 $p < 0$ ,  $-\frac{q}{2p} = \frac{15}{8} \iff q = -\frac{15}{4}p$  .....④

また、 $y = g(x)$  は点  $P(0, 4)$ , 点  $Q(4, 0)$  を通るから  
 $r = 4$ ,  $16p + 4q + r = 0$  .....⑤

④と⑤から  $p = -4$ ,  $q = 15$ ,  $r = 4$  .....[答]

(g)  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 4$ ,  $g(x) = -4x^2 + 15x + 4$  より、 $0 \leq x \leq 4$  の範囲で囲まれる図形の面積は

$$\int_0^4 \{g(x) - f(x)\} dx = \int_0^4 (-x^3 + x^2 + 12x) dx \\ = \left[ -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 6x^2 \right]_0^4 = \frac{160}{3} \quad \text{.....[答]}$$

③ (1) 三角形 OAQ と直線 BP に対して、メネラウスの

定理より、 $\frac{AS}{SQ} \times \frac{QB}{BO} \times \frac{OP}{PA} = 1 \iff \frac{AS}{SQ} = \frac{BO}{QB} \times \frac{PA}{OP}$

$$= 1 \iff \frac{AS}{SQ} = \frac{BO}{QB} \times \frac{PA}{OP} \\ = \frac{1}{t} \times \frac{1-t}{t} = \frac{1-t}{t^2}$$

三角形 OAQ で、 $AS : SQ = (1-t) : t^2$  であるから

$$\vec{OS} = \frac{t^2 \vec{OA} + (1-t) \vec{OQ}}{(1-t) + t^2}, \quad \vec{OQ} = (1-t) \vec{b}$$

$$\text{よって } \vec{OS} = \frac{t^2 \vec{a} + (1-t)^2 \vec{b}}{1-t+t^2} \quad \text{.....[答]}$$

(2)  $BR : RA = s : 1-s$  より

$$\vec{OR} = s \vec{OA} + (1-s) \vec{OB} = s \vec{a} + (1-s) \vec{b}$$

これと(1)の答えを比べて

$$s : (1-s) = t^2 : (1-t)^2 \iff s(1-t)^2 = (1-s)t^2 \\ \iff s = \frac{t^2}{1-2t+2t^2} \quad \text{.....[答]}$$

(3) (2)の答えを  $\vec{OR} = s \vec{a} + (1-s) \vec{b}$  に代入して

$$\vec{OR} = \frac{t^2 \vec{a} + (1-t)^2 \vec{b}}{1-2t+2t^2} \quad \text{.....[答]}$$

$$(4) \quad \frac{\Delta PQR}{\Delta OAB} = 1 - \frac{\Delta OPQ}{\Delta OAB} - \frac{\Delta APR}{\Delta OAB} - \frac{\Delta BQR}{\Delta OAB}$$

$$= 1 - \frac{OP}{OA} \times \frac{OQ}{OB} - \frac{AP}{OA} \times \frac{AR}{AB} - \frac{BQ}{OB} \times \frac{BR}{AB} \\ = 1 - t(1-t) - (1-t)(1-s) - ts \\ = t^2 + (1-2t)s \quad [\text{これに(2)の答えを代入して}] \\ = \frac{2t^2(1-t)^2}{1-2t+2t^2} \quad \text{.....[答]}$$

(5) (4)の答えを  $f(t)$  とおくと

$$f(t) = \frac{4t(1-2t)(1-t)(1-t+t^2)}{(1-2t+2t^2)^2}$$

$0 < t < 1$  の範囲で  $f(t)$  の増減を調べると右の表のようになり、 $f(t)$  は  $x = \frac{1}{2}$  で極大かつ最大

$t$	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	$\frac{1}{4}$	↘	

で、最大値は  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$  .....[答]

④ (1)  $N$  個の玉の色と玉に書かれた数字について、その個数を表にすると、右の表のようになるから、答えは次のようになる。

	白玉	赤玉	計
数字 0	$m$	$n$	$m+n$
数字 1	$k-m$	$l-n$	$N-m-n$
計	$k$	$l$	$N$

$$[\text{答}] \quad (a) \frac{m}{N} \quad (b) \frac{l-n}{N} \quad (c) \frac{m+n}{N}$$

$$(d) \frac{N-m-n}{N}$$

(2)  $k=90$  で、条件(A), (B), (C)が満たされているとき、

$$\frac{l-n}{N} = \frac{2}{25} \quad \text{.....①} \quad \frac{l-n}{N-m-n} = \frac{4}{9} \quad \text{.....②}$$

$$\frac{m}{m+n} = \frac{40}{41} \iff m = 40n \quad \text{.....③}$$

$$\text{③を①と②に代入して、} \quad l-n = \frac{4}{9}(N-41n) = \frac{2}{25}N$$

$$\text{となるから } N = 50n, \quad l = 5n \quad \text{.....④}$$

$$m < 90 < N \text{ と③, ④より } m = 80, \quad n = 2$$

$$\text{よって } l = 10, \quad m = 80, \quad n = 2, \quad N = 100 \quad \text{.....[答]}$$

(3) (2)の答えから、上の表は右の表のようになるから、取り出される玉が赤玉である確率は

	白玉	赤玉	計
数字 0	80	2	82
数字 1	10	8	18
計	90	10	100

$$\frac{10}{100} = \frac{1}{10} \quad \text{.....[答]}$$

(4) 取り出された玉が赤玉であるとき、それに 1 と書かれている確率は  $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$  .....[答]

平成 14 年 (2002)

【出題項目】 ① (1) 整数問題 (2) 三角方程式 (3) いろいろな数列 (4) 複素数の計算 (5) 指数不等式 (6) 場合の数 ② 曲線の接線<sup>(1)</sup> ③ 平面ベクトルと図形 ④ 条件つき確率と乗法定理

【ヒント】 ① (1) 有名不等式に訴えず、まず解を出す。

② (5) 変曲点における接線が境界となる。

③ (3) 題意を無視して 0 は平面外と考えた方がよい。

④ (4) 思いのほか少ない値となる。



## [演習-4]

(17分~20分)

半円  $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$  がある。この円周上に相異なる2点P, Qをとり、弦PQにそって折り返したとき、円弧PQが点  $R(r, 0) [-1 \leq r \leq 1]$  で  $x$  軸に接するようにする。

このとき、次の各問いに答えよ。

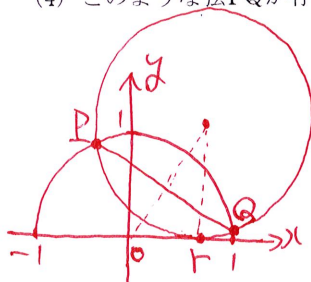
(1) 折り返した円弧が円周の一部となる円の方程式を求めよ。

(2) 直線PQの方程式を求めよ。

(3)  $r$  を用いて弦PQの長さを表せ。

(4) このような弦PQが存在する範囲を求め、図示せよ。

(兵庫医科大)



(1) 円  $x^2 + y^2 = 1$  を PQ にそって折り返した円は、

半径1の円であり、題意より中心が  $(r, 1)$  となる。

$$(x-r)^2 + (y-1)^2 = 1$$

(2)  $x^2 + y^2 = 1 + k(x^2 + y^2 - 2rx - 2y + r^2) = 0$  より  $k = -1$  とし、

$$2rx + 2y - r^2 - 1 = 0$$

(3)  $(r, 1)$  と (2) の直線との距離が1と  $d = \frac{|r^2 + 1|}{2\sqrt{r^2 + 1}} = \frac{\sqrt{r^2 + 1}}{2}$

↑  $(0, 0)$  でのとき

$$2\sqrt{1-d^2} = 2\sqrt{1 - \frac{r^2 + 1}{4}} = \sqrt{3-r^2}$$

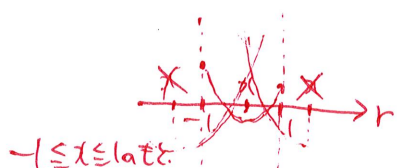
(4)  $-1 \leq r \leq 1$  をみたす  $r$  に対して  $2rx + 2y - r^2 - 1 = 0$  が成立。

$$r^2 - 2xr - 2y + 1 = 0$$

$f(r)$

$Y = f(r)$  が  $Y = 0$  と  $-1 \leq r \leq 1$  に少なくとも1点共有するのは  $0 \leq Y \leq 1$

$$Y = (r-x)^2 - x^2 - 2y + 1$$

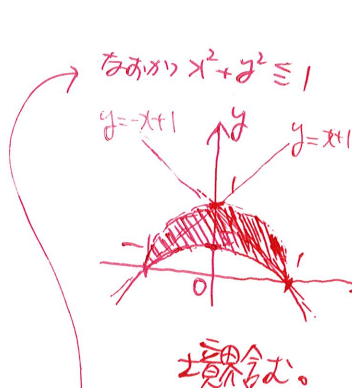


$$-x^2 - 2y + 1 \geq 0 \text{ か?}$$

$$f(-1) \geq 0 \text{ または } f(1) \geq 0$$

$$\therefore y \leq -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \text{ か?}$$

$$y \leq x+1 \text{ または } y \leq -x+1$$



±の範囲を

$$y = \frac{1}{2}r^2 - xr + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(r-x)^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

$$= g(x) \text{ とおす。}$$

$$g(x) \geq y \text{ か?}$$

$$g(-1) \leq y \text{ または}$$

$$g(1) \leq y$$

また、 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2\sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{4}$

より、 $\sin \theta + \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$  である。

②より  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  は同符号であり、両者が負だと、問題の条件  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  に反する。よって、

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \dots\dots\dots ③$$

①式に、②、③を代入して、

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \left( 1 - \frac{1}{8} \right) = \frac{7\sqrt{5}}{16}$$

(2) 二項定理より

$$\begin{aligned} 2003^{2003} &= (2000+3)^{2003} \\ &= \sum_{k=0}^{2003} {}^{2003}C_k 2000^k 3^{2003-k} = 3^{2003} + (10 \text{ の倍数}) \end{aligned}$$

である。よって、 $2003^{2003}$  の一の位の数  $3^{2003}$  の一の位の数に等しい。

$$3^{2003} = 3^{2000} \cdot 3^3 = 81^{500} \cdot 27$$

である。再び二項定理より

$$\begin{aligned} 81^{500} &= (80+1)^{500} = \sum_{k=0}^{2003} {}^{2003}C_k 80^k 1^{500-k} \\ &= 1^{500} + (10 \text{ の倍数}) = 1 + 10n \quad (n \text{ はある自然数}) \end{aligned}$$

とおける。この両辺に 27 をかけて、

$$81^{500} \cdot 27 = 10(27n+2) + 7. \text{ 答えは } 7$$

(3)  $(\vec{a}-\vec{b}) \perp (2\vec{a}+5\vec{b})$  より

$$\begin{aligned} (\vec{a}-\vec{b}) \cdot (2\vec{a}+5\vec{b}) &= 0 \iff 2\vec{a} \cdot \vec{a} + 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 5\vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \\ \iff 2|\vec{a}|^2 + 3|\vec{a}||\vec{b}|\cos \theta - 5|\vec{b}|^2 &= 0 \end{aligned}$$

ここで、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とおいた。

問題に与えられた条件式  $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$  を上の式に代入

$$\text{すると、} 2(2|\vec{b}|)^2 + 3(2|\vec{b}|)|\vec{b}|\cos \theta - 5|\vec{b}|^2 = 0$$

$$\iff 3|\vec{b}|^2(1+2\cos \theta) = 0$$

問題の条件  $|\vec{b}| \neq 0$  より  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

ベクトルのなす角は  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  の範囲で考えるので、 $\theta = 120^\circ$

(4) 与えられた式を展開すると、

$$x^2 + 13 + \frac{36}{x^2} \quad \dots\dots\dots ①$$

ここで、相加・相乗平均の不等式より、

$$\sqrt{x^2 \times \frac{36}{x^2}} \leq \frac{1}{2} \left( x^2 + \frac{36}{x^2} \right) \iff 12 \leq x^2 + \frac{36}{x^2}$$

等号成立は  $x^2 = \frac{36}{x^2}$  のとき。(この式)  $\iff x^4 = 36$

$$\iff x^2 = \pm 6 \iff x = \pm \sqrt{6}, \pm \sqrt{6}i \text{ である.}$$

$x > 0$  より、求める  $x$  の値は  $x = \sqrt{6}$

(5)  $a_3 = 4a_2 - 3a_1 - 2 = 16 - 3 - 2 = 11$

$$a_4 = 4a_3 - 3a_2 - 2 = 44 - 12 - 2 = 30$$

$$a_5 = 4a_4 - 3a_3 - 2 = 120 - 33 - 2 = 85$$

$$a_6 = 4a_5 - 3a_4 - 2 = 340 - 90 - 2 = 248$$

$$a_7 = 4a_6 - 3a_5 - 2 = 992 - 255 - 2 = 735$$

$$a_8 = 4a_7 - 3a_6 - 2 = 2940 - 744 - 2 = 2194$$

答えは第 8 項

(6)  $n$  を自然数とする。子供が  $2n$  人いるとすると、みかんの総数は  $4(2n) + 9 = 8n + 9 \dots\dots\dots ①$  個である。 $2n-1$  人に 6 個ずつ配ると、残りが 5 個以下になることから、 $0 \leq (8n+9) - 6(2n-1) \leq 5$

$$\iff 0 \leq -4n + 15 \leq 5 \iff \frac{5}{2} \leq n \leq \frac{15}{4} \iff n = 3$$

これを①に代入して、みかんの総数は 33 個

(7) 1 回の操作でタンパク質の量は  $\frac{3}{4}$  になる。したがって、 $n$  回の操作でタンパク質の量は  $\left(\frac{3}{4}\right)^n$  になる。

これが  $5\% = \frac{1}{20}$  以下になればよい。逆数を考えると、

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n \geq 20. \text{ この両辺に } \log_{10} \text{ をつけて計算すると、}$$

$$n(2\log_{10} 2 - \log_{10} 3) \geq 1 + \log_{10} 2$$

$$\iff 0.1249n \geq 1.3010 \iff n \geq 10.4 \dots\dots$$

答えは 11 回

(8) 同じ物のある順列の公式より、赤玉 4 個と白玉 3

$$\text{個の並べ方は } \frac{(4+3)!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \text{ 通り}$$

指定された得点となる並べ方を調べると、

得点	配置
0 点	白白白白赤赤赤
1 点	白白赤白白赤赤
2 点	白赤白白赤赤赤, 白白赤赤白白赤
3 点	赤白白白赤赤赤, 白赤白白赤赤赤, 白白赤赤赤白白

以上 7 通りあるので、求める確率は  $\frac{7}{35} = \frac{1}{5}$

② (1) 円  $C_1: x^2 + y^2 - 1 = 0$  を折り返した円の半径は 1 で、中心は  $(r, 1)$  となる。よって

$$C_2: (x-r)^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$\iff x^2 + y^2 - 2rx - 2y + r^2 = 0 \quad \dots\dots\dots [\text{答}]$$

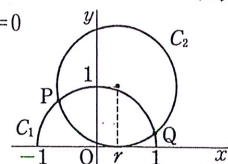
(2)  $(C_1 \text{ の左辺}) - (C_2 \text{ の左辺}) = 0$

で定まる直線

$$2rx + 2y - r^2 - 1 = 0 \quad \dots [\text{答}]$$

は  $C_1$  と  $C_2$  の交点を通る。

よって、これが答えとなる。



(3) 直線 PQ と  $C_1$  の中心  $(0, 0)$  との距離は、点と直線の距離の公式より、

$$\frac{|2r \cdot 0 + 2 \cdot 0 - r^2 - 1|}{\sqrt{(2r)^2 + 2^2}} = \frac{r^2 + 1}{2\sqrt{r^2 + 1}} = \frac{\sqrt{r^2 + 1}}{2}$$

$$\text{三平方の定理より, } \frac{PQ}{2} = \sqrt{1 - \frac{r^2 + 1}{4}} = \sqrt{\frac{3 - r^2}{4}}$$

$$\text{よって, } PQ = \sqrt{3 - r^2} \quad \dots\dots\dots [\text{答}]$$

(4) 弦 PQ でなく、直線 PQ の通る範囲を  $W$  とおく。

$(x_0, y_0) \in W$

$\iff -1 \leq r \leq 1$  を満たすある数に対して、直線

$2rx + 2y - r^2 - 1 = 0$  が  $(x_0, y_0)$  を通る



$\Leftrightarrow 2rx_0 + 2y_0 - r^2 - 1 = 0$  を満たす数  $r$  が  $-1 \leq r \leq 1$  の範囲に存在する

$\Leftrightarrow r$  の 2 次方程式  $f(r) = r^2 - 2x_0r - 2y_0 + 1 = 0$  が  $-1 \leq r \leq 1$  の範囲に少なくとも 1 つの解を持つ

(i)  $-1 \leq r \leq 1$  の範囲に唯一の解を持つか  $r = \pm 1$  を解に持つ場合

$f(-1) \leq 0$  かつ  $f(1) \geq 0$

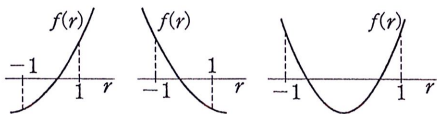
または  $f(-1) \geq 0$  かつ  $f(1) \leq 0$

$\Leftrightarrow (2 + 2x_0 - 2y_0 \leq 0$  かつ  $2 - 2x_0 - 2y_0 \geq 0)$

または  $(2 + 2x_0 - 2y_0 \geq 0$  かつ  $2 - 2x_0 - 2y_0 \leq 0)$

$\Leftrightarrow (y_0 \geq x_0 + 1$  かつ  $y_0 \leq -x_0 + 1)$

または  $(y_0 \leq x_0 + 1$  かつ  $y_0 \geq -x_0 + 1)$



(ii)  $-1 \leq r \leq 1$  の範囲に 2 つの解 (重解を含む) を持つ場合

$f(-1) \geq 0$  かつ  $f(1) \geq 0$  かつ

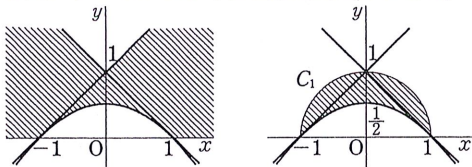
判別式  $D$  が  $\frac{D}{4} = x_0^2 - (-2y_0 + 1) \geq 0$  かつ

軸の位置  $-1 \leq x_0 \leq 1$

$\Leftrightarrow (y_0 \leq x_0 + 1$  かつ  $y_0 \leq -x_0 + 1)$  かつ  $y_0 \geq \frac{1 - x_0^2}{2}$

かつ  $-1 \leq x_0 \leq 1$

(i)(ii) を図示すると  $W$  は左下図斜線部 (境界を含む)



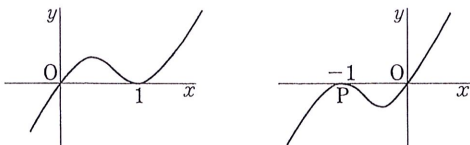
線分 PQ は、直線 PQ のうち円  $C_1$  内の部分なので、答えは右上図斜線部 (境界を含む)。

③ (1) 条件 (ア)(イ) より  $C_1$  は  $x$  軸と接するので、 $C_1: y = x(x^2 + ax + 1)$  において、2 番目の因数は重解をもつ。よって、判別式  $D = a^2 - 4 = 0$

(i)  $a = -2$  のとき、 $C_1: y = x(x-1)^2$  は極小値が 0 のため、極大を与える点は  $x$  軸上に乗らない。

(ii)  $a = 2$  のとき、 $C_1: y = x(x+1)^2$  は確かに極大を与える点  $P(-1, 0)$  が  $x$  軸上にある。(i)(ii) より

$a = 2, P(-1, 0)$  .....[答]



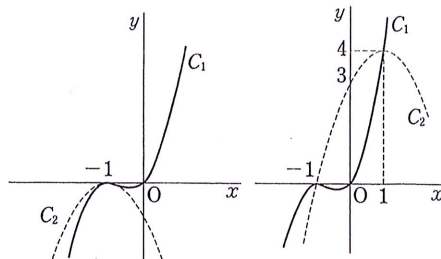
(2)  $C_2$  上に  $P$  が乗ることから、 $0 = -1 - b + c$  よって、 $C_2: y = -x^2 + bx + b + 1$  とおける。この頂点  $\left(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4} + b + 1\right)$  が  $C_1: y = x^3 + 2x^2 + x$  上に乗るので、 $b^3 + 2b^2 - 4b - 8 = 0 \Leftrightarrow (b+2)^2(b-2) = 0$

$\Leftrightarrow b = \pm 2$

(i)  $b = -2$  のとき、 $C_2: y = -x^2 - 2x - 1 = -(x+1)^2$  の頂点  $Q$  が  $P$  と一致してしまい、問題の条件に反する。

(ii)  $b = 2$  のとき、 $C_2: y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$  より頂点は  $(1, 4)$

(i)(ii) より  $b = 2, c = 3, Q(1, 4)$  .....[答]



(3)  $(C_1 \text{ の式}) - (C_2 \text{ の式})$  を因数分解すると、 $0 = (x+3)(x+1)(x-1)$

よって、 $R(-3, -12)$  .....[答]

(4)  $S = \int_{-3}^{-1} (x+3)(x+1)(x-1) dx$

$+ \int_{-1}^1 \{-(x+3)(x+1)(x-1)\} dx$

ここで、 $t = x+1$  とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 (t+2)t(t-2) dt + \int_0^2 \{-(t+2)t(t-2)\} dt \\ &= \int_{-2}^0 (t^3 - 4t) dt - \int_0^2 (t^3 - 4t) dt \end{aligned}$$

被積分関数は奇関数なので、 $-2$  から  $0$  までの積分値は、 $2$  から  $0$  までの積分値の  $-1$  倍である。よって、

$$S = 2 \int_0^2 (4t - t^3) dt = 2 \left[ 2t^2 - \frac{t^4}{4} \right]_0^2 = 8 \quad \text{.....[答]}$$

平成 16 年 (2004)

【出題項目】 ① (1) 整数問題 (2) 指数関数 (3) 面積<sup>(1)</sup> (4) 複素数と図形 (5) 確率の計算 ② 三角関数の最大・最小 ③ 円と直線、軌跡と方程式

④ 空間ベクトルと図形

【ヒント】 ① (1) 和による表し方は複数ある。

③ (5) 像の式は逆算して代入する。①(3)も同じ。

④ 球面鏡は下半分だけあると考えよ。

❖❖❖ 解 答 ❖❖❖

① (1)  $2004 = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+m)$

とおくと、 $2004 = \frac{(2n+m+1)m}{2}$

$\Leftrightarrow 4008 = (2n+m+1)m$   $4008 > m^2 \Rightarrow 63 \geq m$  である。また、 $4008 = 2^3 \cdot 3 \cdot 167$  であり、 $2n+m+1$