

第11週 ⑥～⑧ 医学部合否決め問題演習

[入試演習 17]

各  $a_i$  は  $-1, 0, 1$  のいずれかの値をとるものとし、 $n$  個の数をならべたもの  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  を考える。いま、 $-n \leq r \leq n$  なる整数  $r$  に対して

$$r = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

となる  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  の個数を  $f_n(r)$  と書くことにする。例えば、 $n=2, r=1$  の場合は、 $(1, 0), (0, 1)$  の2個となるので  $f_2(1)=2$  となる。

(1)  $f_4(0)$  を求めなさい。  $= 19$

(2)  $n$  が2以上の場合に、 $f_n(n-2)$  を  $n$  の式で表したい。以下の空欄を埋めよ。

まず、 $n-2 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  となるためには  $a_1, a_2, \dots, a_n$  のなかで

1をとるのは  $n-2$  個以上でなければならない。そのなかで、1をとるのが  $n$

個の場合は起こらない。よって、つぎの2つの場合になる：

[a] 1が  $n-2$  個で、残りの  $2$  個は0である。

[b] 1が  $n-1$  個で、残りの  $1$  個は  $-1$  である。

[a] の場合は  $\frac{n(n-1)}{2}$  通りあり、[b] の場合は  $n$  通りある。

従って、 $f_n(n-2) = \frac{n(n+1)}{2}$  である。”

(3)  $f_n(-r) = f_n(r)$  ( $r=1, 2, \dots, n$ ) であることは既知として、 $\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^n$

を展開した式が

$$\frac{f_n(n)}{x^n} + \frac{f_n(n-1)}{x^{n-1}} + \dots + \frac{f_n(1)}{x} + f_n(0) + f_n(1)x + f_n(2)x^2 + \dots + f_n(n)x^n$$

となることを示しなさい。

(4)  $f_n(-r) = f_n(r)$  ( $r=1, 2, \dots, n$ ) を示しなさい。

(日本大一医)

(1)  $f_4(0)$  :  $a_1 \sim a_4$  すべて0なら0になる。

$\{0,0,0,0\}, \{0,0,1,-1\}, \{-1,-1,1,1\}$  の並べ方の数。

$$\therefore f_4(0) = 1 + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{2!2!} = 19$$

$$(x^0 + x^1 + x^{-1})^n = (x^0 + x^1 + x^{-1})^n$$

(3)  $\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^n = (x^1 + x^0 + x^{-1})^n$  の各因数からそれぞれ  $x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_n}$  を取り出して

掛け合わせたものが  $x^r$  になる。  $r = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  ( $a_1 \sim a_n$  は  $-1$  または  $0$  または  $1$ )  $-n \leq r \leq n$

であるから、展開したときの  $x^r$  の係数は  $f_n(r)$  である。  $f_n(-r) = f_n(r)$  と示す。

$$\begin{aligned} \left(x+1+\frac{1}{x}\right)^n &= \sum_{r=-n}^n f_n(r) x^r = \frac{f_n(n)}{x^n} + \frac{f_n(n-1)}{x^{n-1}} + \dots + f_n(0) + f_n(1)x + f_n(2)x^2 + \dots + f_n(n)x^n \\ &= \frac{f_n(n)}{x^n} + \frac{f_n(n-1)}{x^{n-1}} + \dots + f_n(0) + f_n(1)x + \dots + f_n(n)x^n \end{aligned}$$

(4)  $r=1, 2, 3, \dots, n$  のとき、 $r = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  をみたす  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  に対して、

$(b_1, b_2, \dots, b_n) = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$  を対応させると、 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  は  $-r = b_1 + b_2 + \dots + b_n$  をみたす。

逆に(4)をみたす  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  に対して、上と同様に各成分の符号を変えたものが  $r$  をみたす。よって、 $f_n(-r) = f_n(r)$  ( $r=1, 2, \dots, n$ )

第11週 ⑥～⑧ 医学部合否決め問題演習

[入試演習 18]

正の整数  $n, s$  と負でない整数  $r$  に対して、条件  $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r \\ 0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq s \end{cases}$  かつ  $\dots\dots\dots (*)$

を満たす整数の組  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  の総数を記号  ${}_n D_r$  で示すことにする。ただし、 $r > sn$  ならば  ${}_n D_r = 0$  と定める。たとえば、 $s=1$  のときは  $x_i (1 \leq i \leq n)$  が 0 または 1 となり、 ${}_n D_r$  は  $n$  個のもののから  $r$  個を選ぶ選び方の総数と一致するので、二項係数  ${}_n C_r$  そのものである。

以下、 $s=2$  のとき、 ${}_n D_r$  のいくつかの性質を調べてみよう。

まず、 $n=1$  のとき、 ${}_1 D_0, {}_1 D_1, {}_1 D_2$  を求めると、この順に 1, 1, 1 となる。

次に、 $n=2$  のとき、 ${}_2 D_0, {}_2 D_1, {}_2 D_2, {}_2 D_3, {}_2 D_4$  は、この順に 1, 2, 3, 2, 1 であることがわかる。

また、 ${}_n D_0 = \text{1}$ ,  ${}_n D_1 = \text{n}$  である。

次に、 $n \geq 3, r \geq 2$  のとき、 $(*)$  において、 $x_n = 0$  を代入した場合の整数の組

$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  の総数は、 $\text{ ${}_{n-1} D_r$ }$  と表される。さらに、 $(*)$  において、 $x_n = 1$  を代入し

た場合の整数の組  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  の総数は、 $\text{ ${}_{n-1} D_{r-1}$ }$  と表され、 $x_n = 2$  を代入した場合

の整数の組  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  の総数は、 $\text{ ${}_{n-1} D_{r-2}$ }$  と表される。ゆえに、 ${}_n D_r$  はこれらの

和 として表されるので、漸化式  ${}_n D_r = \text{ ${}_{n-1} D_r + {}_{n-1} D_{r-1} + {}_{n-1} D_{r-2}$ }$  を得る。

ところで、 $(*)$  を満たす整数の組  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  に対して、整数の組

$(\text{2} - x_1, \text{2} - x_2, \dots, \text{2} - x_n)$  は  $(*)$  の  $r$  を  $2n - r$  とした条件を満たしている。よって  ${}_n D_r = {}_n D_{2n-r}$  である。

さらに、 $x$  の  $2n$  次多項式  ${}_n D_0 + {}_n D_1 x + \cdots + {}_n D_{2n} x^{2n} \dots\dots\dots (**)$

を因数分解することを考えてみよう。ただし、 $x$  のある多項式が因数分解できないときは、因数分解した形は、その多項式そのものと定める。まず  $n=1$  と  $n=2$  のとき、 $(**)$  を因

数分解すると、それぞれ  ,   を得る。これらのことから  $(**)$  を因数分解する

と、  となることが数学的帰納法で示される。これに  $x=1$  を代入すると

${}_n D_0 + {}_n D_1 + \cdots + {}_n D_{2n} = \text{ }$  が得られる。 (金沢医科大)

$n=1$  のとき、 ${}_1 D_0 + {}_1 D_1 x + {}_1 D_2 x^2 = 1 + x + x^2$

$n=2$  のとき、 ${}_2 D_0 + {}_2 D_1 x + {}_2 D_2 x^2 + {}_2 D_3 x^3 + {}_2 D_4 x^4 = 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$   
 $= (1+x+x^2)^2$

$(**)$  を  $F(n)$  とおくと、 $F(n) = (1+x+x^2)^n$  と仮定できる。これを数学的帰納法で示す。

(i)  $n=1$  のとき  $0, 1, 2$

(ii)  $n=k$  のとき、 $F(k) = (1+x+x^2)^k$  と仮定する。 (目標:  $F(k+1) = (1+x+x^2)^{k+1}$  を示す)  
 $F(k+1) = (1+x+x^2)^{k+1}$

## [演習-1]

放物線  $C: y = x^2 - ax$  ( $a$  は定数) 上の2点  $P, Q$  における接線で点  $A(0, -9)$  を通るものをそれぞれ  $l, m$  とする。ただし、点  $P$  の  $x$  座標の方が点  $Q$  の  $x$  座標より大きいとする。次の問いに答えなさい。

(1) 放物線  $C$  と接線  $l, m$  とで囲まれる図形の面積を求めなさい。

(2)  $\angle PAQ$  が  $45^\circ$  となるように  $a$  の値を定めなさい。

(産業医科大)

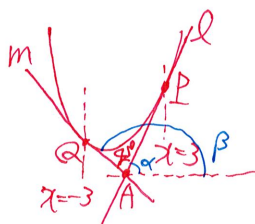
$$C: y = x^2 - ax = f(x) \text{ とおく。 } f'(x) = 2x - a$$

$C$  上の点  $(t, f(t))$  における接線は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= (2t-a)(x-t) + t^2 - at \\ &= (2t-a)x - t^2 - 0 \end{aligned}$$

①  $A(0, -9)$  を通るとき、 $-9 = -t^2$  より、 $t = \pm 3$

$$\begin{aligned} \text{したがって、} \left. \begin{aligned} l: & y = (6-a)x - 9 \\ m: & y = -(6+a)x - 9 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$



(1) 求める面積を  $S$  とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^0 [x^2 - ax - \{-(6+a)x - 9\}] dx \\ &\quad + \int_0^3 [x^2 - ax - \{(6-a)x - 9\}] dx \\ &= \int_{-3}^0 (x+3)^2 dx + \int_0^3 (x-3)^2 dx \\ &= \left[ \frac{1}{3}(x+3)^3 \right]_{-3}^0 + \left[ \frac{1}{3}(x-3)^3 \right]_0^3 = 18 // \end{aligned}$$

(2)  $l, m$  と  $x$  軸正方向とのなす角をそれぞれ  $\alpha, \beta$  ( $0 < \alpha < \beta < \pi$ ) とすると、

$$\tan \alpha = 6-a, \quad \tan \beta = -6-a$$

これから、

$$\begin{aligned} \tan(\beta - \alpha) &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{-6-a - (6-a)}{1 + (6-a)(-6-a)} \\ &= \frac{-12}{a^2 - 35} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a = \pm \sqrt{35} //$$

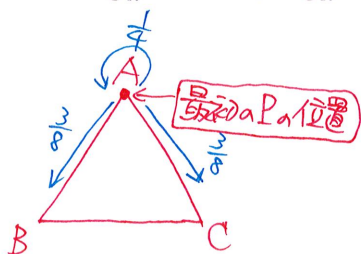
## [演習-2]

正三角形 $ABC$ の頂点上を点 $P$ が次の規則①, ②にしたがって移動する。

- ① 時刻0に $P$ は $A$ にいる。
- ② 1秒ごとに、 $P$ は確率 $\frac{1}{4}$ で今いる頂点にとどまり、等確率で今いる頂点以外の他の2頂点のどちらかに移動する。

$n$ 秒後に $P$ が $A$ にいる確率を $p_n$ とし、 $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ とすると、以下の各問いに答えよ。

- (1)  $p_n$ を用いて $p_{n+1}$ を表せ。
- (2)  $p_n$ を $n$ の式で表せ。
- (3)  $p$ の値を求めよ。
- (4) 不等式 $|p_n - p| < 5^{-20}$ を満たす最小の $n$ の値を求めよ。ただし必要ならば、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ ,  $\log_{10} 3 = 0.4771$  であることは用いてよい。 (日本医科大)



$$\begin{aligned} (1) p_{n+1} &= (1 - p_n) \times \frac{3}{8} + \frac{1}{4} p_n \\ &= -\frac{1}{8} p_n + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$(2) \text{解いて, } p_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 + 2 \left( -\frac{1}{8} \right)^n \right\}$$

$$(3) p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{3}$$

$$(4) |p_n - p| = \left| \frac{2}{3} \left( -\frac{1}{8} \right)^n \right| = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{8} \right)^n < 5^{-20}$$

常用対数をとって、 $\log_{10} \frac{2}{3} \left( \frac{1}{8} \right)^n < \log_{10} 5^{-20}$  ↓ ときと-127天

$$n > \frac{20 - \log_{10} 3 - \log_{10} 2}{3 \log_{10} 2} \div 15.2$$

$$\text{よって } 16 //$$