

第11週 ④～⑤ 医学部合否決め問題演習

[入試演習 15]

自然数 k を 2 の累乗と奇数の積として $k = 2^a m$ (a は 2 の累乗の指数, m は奇数) と表すとき, $f(k) = a$ と定める. $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ とするとき

- (1) S_{50} を求めよ.
- (2) n が 2 の累乗のとき S_n を n の式で表せ.
- (3) $\frac{n-1}{2} \leq S_n < n$ であることを示せ.

$a = f(k)$: 2 を k の因数に含む回数の個数.
 (2 の因数 2 の個数)
 「2」といふ
 因数の個数.
 (群馬大一医)

(1) $S_{50} = f(1) + f(2) + \dots + f(50)$
 $= \frac{50}{2} + \left[\frac{50}{2^2}\right] + \left[\frac{50}{2^3}\right] + \left[\frac{50}{2^4}\right] + \left[\frac{50}{2^5}\right]$
 $= 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47$

(2) $n = 2^p$ (p は 0 以上の整数) とおくと.

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{2^p}\right]$$

$$= [2^{p-1}] + [2^{p-2}] + \dots + [2^0]$$

$$= 2^{p-1} + 2^{p-2} + \dots + 1 = \frac{2^p - 1}{2 - 1} = n - 1$$

(2) の状態では
 なにもいれる
 ↓

(3) $2^p \leq n < 2^{p+1}$ (p は 0 以上の整数) とおくと $[x] \leq x < x+1$.

$$S_n = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{2^p}\right]$$

$$\leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^p}$$

$$= n \cdot \frac{\frac{1}{2} \{1 - (\frac{1}{2})^p\}}{1 - \frac{1}{2}} = n \cdot \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < n \quad \therefore S_n < n \quad \dots \textcircled{1}$$

次に $\frac{n-1}{2} \leq S_n$ を示す.

$$S_n = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{2^p}\right]$$

$$\geq \left[\frac{2^p}{2}\right] + \left[\frac{2^p}{2^2}\right] + \dots + \left[\frac{2^p}{2^p}\right]$$

$$= 2^{p-1} + 2^{p-2} + \dots + 1$$

$$= 2^p - 1$$

$$= \frac{2^{p+1}}{2} - 1$$

$$\left(\begin{aligned} &> \frac{n}{2} - 1 \quad (\because n < 2^{p+1}) \\ &= \frac{n-2}{2} \end{aligned} \right)$$

ここで $n < 2^{p+1}$ より $n+1 \leq 2^{p+1}$

$$\therefore S_n \geq \frac{n+1}{2} - 1$$

$$= \frac{n-1}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より $\frac{n-1}{2} \leq S_n < n$

右側の
 不等式は
 (2) より
 示せる.

✓ [入試演習 16]

以下の問いに答えよ。

- (1) 3つの正の実数 x, y, z が $x+y+z=10$ を満たすとき、点 (x, y) の動く範囲を図示せよ。
また、これらの点のうち、 x, y がともに整数であるものは全部でいくつあるか答えよ。
- (2) a を正の定数とする、3つの正の実数 x, y, z が $x+y+z=a$ を満たし、さらに x, y, z を3辺の長さとする三角形が存在するとき、点 (x, y) の動く範囲を図示せよ。
- (3) n を自然数とする。 $x+y+z$ が $2n$ 以下の偶数であり、さらに x, y, z を3辺の長さとする三角形が存在するような3つの自然数 x, y, z の組 (x, y, z) は全部でいくつあるか。
 n を用いて答えよ。

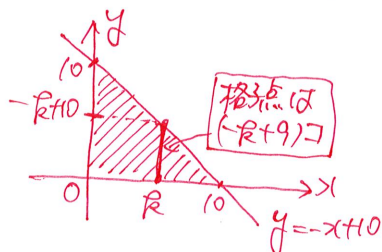
(北里大一医)

(1) $x > 0, y > 0$ か?

$$z = 10 - (x+y) > 0$$

$$\therefore x+y < 10$$

よって、みたす範囲は以下。



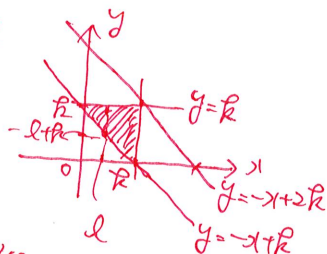
$1 \leq x \leq 9$ なる x について、求める個数は

$$\sum_{x=1}^9 (-x+9) = -\frac{1}{2} \times 9 \times 10 + 9 \times 9 = -45 + 81 = 36$$

(3) 条件をみたす (x, y, z) のうち、

$$x+y+z=2n \quad (n=1, 2, \dots, n)$$

にあてはまる。となるものの個数は (2) より、以下の図を利用し



$$\begin{aligned} & \sum_{x=1}^{n-1} \{(n-1) - (-x+n)\} \\ &= \sum_{x=1}^{n-1} (x-1) \\ &= \sum_{x=1}^{n-1} 0 = 0 \end{aligned}$$

(2) $x > 0, y > 0$ か?

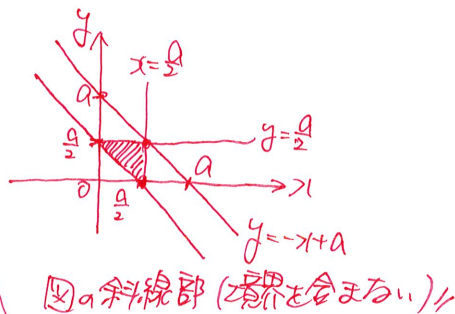
$$z = a - (x+y) > 0$$

$$\therefore x+y < a$$

かつ、 x, y, z を3辺とする三角形が存在することから

$$\begin{aligned} |x-y| &< a - (x+y) < x+y \\ \Rightarrow \frac{a}{2} &< x+y \\ x+y-a &< x-y < a-(x+y) \\ \Rightarrow \frac{a}{2} &< x < \frac{a}{2} \end{aligned}$$

①～⑥の共通部分を図示すればよい。



図の斜線部 (境界も含む)。

よって求める個数は

$$\begin{aligned} & \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{x=1}^n \{(n-3)(n-2)(n-1) - (n-2)(n-1)x\} \\ &= \frac{1}{6} \{0 - (n-2)(n-1)n\} \\ &= \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) \end{aligned}$$

[演習 - 1]

関数 $f(x) = 2[x] - [2x]$ ($-2 \leq x \leq 2$) について、次の問いに答えよ。ただし、 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

- (1) $f(1.3)$ の値を求めよ。
- (2) $f(-1.3)$ の値を求めよ。
- (3) $y = f(x)$ ($-2 \leq x \leq 2$) のグラフをかけ。
- (4) $y = f(x)$ と $y = 3x + b$ との交点の個数を求めよ。ただし、 $-3 \leq b \leq 0$ とする。

(関西医科大)

$$f(x) = 2[x] - [2x] \quad (-2 \leq x \leq 2) \text{ について}$$

$$\begin{aligned} (1) f(1.3) &= 2[1.3] - [2.6] \\ &= 2 \times 1 - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) f(-1.3) &= 2[-1.3] - [-2.6] \\ &= 2 \times (-2) - (-3) = -1 \end{aligned}$$

(3) n は整数とす。

(i) $n \leq x < n + \frac{1}{2}$ のとき (\leftarrow 小数部分 $0 \sim 0.5$ 未満)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2[x] - [2x] \\ &= 2n - 2n = 0 \end{aligned}$$

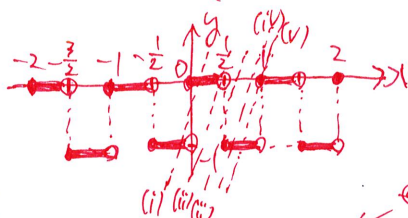
(ii) $n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1$ のとき (\leftarrow 小数部分 $0.5 \sim 0.99 \dots$)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2[x] - [2x] \\ &= 2n - (2n+1) = -1 \end{aligned}$$

$\nwarrow 2n+1 \leq 2x < 2n+2$

(i), (ii) より

$y = f(x)$ のグラフ ($-2 \leq x \leq 2$) は



(4) $y = 3x + b = 0$ のとき $x = -\frac{b}{3}$ $\leftarrow -3 \leq b \leq 0$ より $0 \leq -\frac{b}{3} \leq 1$

$$(i) 0 \leq -\frac{b}{3} < \frac{1}{3} \text{ かつ } -1 \leq b \leq 0 \text{ のとき } 2 \text{ 点}$$

$$(ii) \frac{1}{3} \leq -\frac{b}{3} < \frac{1}{2} \text{ かつ } -\frac{3}{2} < b \leq -1 \text{ のとき } 1 \text{ 点}$$

$$(iii) \frac{1}{2} \leq -\frac{b}{3} < \frac{5}{6} \text{ かつ } -\frac{5}{2} < b \leq -\frac{3}{2} \text{ のとき } 0 \text{ 点}$$

$$(iv) \frac{5}{6} \leq -\frac{b}{3} < 1 \text{ かつ } -3 < b \leq -\frac{5}{2} \text{ のとき } 1 \text{ 点}$$

$$(v) -\frac{b}{3} = 1 \text{ かつ } b = -3 \text{ のとき } 2 \text{ 点}$$

9

自然数 m の正の約数の総和を $S(m)$ で表す。たとえば、 $S(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$ である。

(1) p を素数, n を自然数とすると, $S(p^n) = \frac{\boxed{}}{p-1}$ となる。

(2) 自然数 a, b の最大公約数が1 のとき, $S(ab)$ は $S(a)$ と $S(b)$ を用いて表され

$S(ab) = \boxed{}$ となる。

(3) n を自然数とし, $2^{n+1}-1$ が素数のとき, $m=2^n(2^{n+1}-1)$ とおく。

$S(m)$ を m を用いて表すと $S(m) = \boxed{}$ である。

(4) i, j を自然数とするとき, $m = 2^i 3^j 5$ の形をしていて, $S(m) = 3m$ となる最小の m は

である。

(東海大一医)

$$(1) S(p^n) = 1 + p + p^2 + \dots + p^n$$
$$= \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1} //$$

(2) a, b が互いに素のとき、素因数分解により、

ab の約数は a の約数と b の約数の積。

よち、 a, b, a の n 個の正約数をそれぞれ $q_k (k=1, 2, \dots, n)$ 、 $b_\ell (\ell=1, 2, \dots, m)$

と表すと、 $S(ab) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_m)$
 $= S(a)S(b) //$

(3) $2^{n+1}-1$ が素数のとき, 2^n と $2^{n+1}-1$ は互いに素だから, (2) より

$$\begin{aligned} S(m) &= S(2^n(2^{n+1}-1)) \\ &= S(2^n) \times S(2^{n+1}-1) \\ &= \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \times \{1+(2^{n+1}-1)\} \\ &= 2^{n+1}(2^{n+1}-1) = 2m \end{aligned}$$

→ これにより、 $2^{2^k+1}-1$ または $3^{2^k+1}-1$ は、5の倍数。
 $2 \cdot 2^{2^k+1}-1$ が5の倍数となる最小の k は3.

$\therefore 15 \times (3^{j+1} - 1) = 2^3 \cdot 3^j \cdot 5$
 $\therefore 3^{j+1} - 1 = 8 \cdot 3^j - 1 \Rightarrow j = 1$

したがって、 $m = 2^3 \cdot 5 = 120$ は条件を満たす。

$$\begin{aligned} (4) \quad S(m) &= S(2^{\downarrow} 3^{\downarrow} 5) \\ &= S(2^{\downarrow}) S(3^{\downarrow}) S(5) \\ &= \frac{2^{\downarrow+1}-1}{2-1} \times \frac{3^{\downarrow+1}-1}{3-1} \times (1+5) \\ &= 3(2^{\downarrow+1}-1)(3^{\downarrow+1}-1) = \underline{\underline{3m}} \\ &\qquad\qquad\qquad 3 \times 2^{\downarrow} 3^{\downarrow} 5 \end{aligned}$$

○ $3^{24}-1$ の5の倍数とある最小のものは3 ↓

$$\left(\begin{array}{l} \text{なのでこの } (2^{24}-1) \times 80 = 2^6 \cdot 27 \cdot 5 \\ (2^{24}-1) \times 16 = 27 \cdot 2^5 \end{array} \right) \begin{array}{l} m \text{ は} \\ 120 \text{ と} \\ \text{超える} \end{array}$$

2,2 m = 120 u

$$(2^{i+1}-1)(3^{j+1}-1) = 2^i 3^j 5 \dots \textcircled{1}$$

第11週 ④～⑤ 医学部合否決め問題演習

[演習-3]

p が素数のとき, p^a (a は正の整数) の正の約数の個数は であり, 正の約数すべての積は p の 乗である。したがって, 整数 $n > 1$ が $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_m^{a_m}$ と素因数分解されるとき, n の正の約数の個数は である。たとえば 1320 の正の約数は 個ある。もし n の正の約数すべての積が n^2 に等しいならば, n の正の約数の個数は であり, このときの m は または である。 (東海大一医)

p が素数のとき p^a の正の約数は $1, p, p^2, \dots, p^a$ $(a+1)$ 個

正の約数すべての積は $p^0 \times p^1 \times p^2 \times \dots \times p^a = p^{1+2+\dots+a} = p^{\frac{1}{2}a(a+1)}$ よって $\frac{1}{2}a(a+1)$ 乗

次に, $n > 1$ が $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_m^{a_m}$ と素因数分解されるとき,

n の約数は $\begin{matrix} p_1^0 & p_1^1 & \dots & p_1^{a_1} \\ p_2^0 & p_2^1 & \dots & p_2^{a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m^0 & p_m^1 & \dots & p_m^{a_m} \end{matrix}$ よって $(a_1+1)(a_2+1) \dots (a_m+1)$ 個

たとえば, $1320 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 11^1$ の正の約数は $(3+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 32$ 個

n の正の約数すべてを小さい順に d_1, d_2, \dots, d_k とすると

$$d_1 d_k = d_2 d_{k-1} = \dots = d_k d_1 = n^2 \quad \text{が成り立つ}$$

$$\text{よって } (d_1 d_2 \dots d_k)^2 = n^k \quad \therefore d_1 d_2 \dots d_k = n^{\frac{k}{2}} = n^2 \quad \therefore \frac{k}{2} = 4 \quad \therefore k = 8$$

したがって, $k = 8$ である

このとき n の正の約数は $\begin{cases} 1, p_1, p_1^2, p_1^3 (=n) \\ 1, p_1, p_2, p_1 p_2 (=n) \end{cases}$ の 2 つの集合からなる。

$$m = 1 \text{ or } 2 //$$