

第11週 ①～③ 医学部合否決め問題演習

✓ [入試演習 13]

1 辺の長さが 1 の正十二面体を考える。

点 O, A, B, C, D, E, F を図に示す正十二面体の

頂点とし,  $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$  とおくととき,

以下の問いに答えよ。

なお, 正十二面体では, すべての面は合同な正五角形であり, 各頂点は 3 つの正五角形に共有されている。

(1) 1 辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを求め

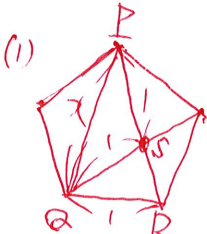
て, 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を求めよ。

(2)  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{OF}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を用いて表せ。

(3) O から平面 ABD に垂線 OH を下ろす。  $\overrightarrow{OH}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を用いて表せ。

さらにその長さを求めよ。

(福井大一医)

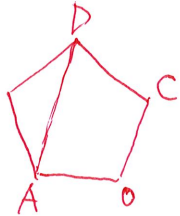
(1)   $x:1 = 1:(x-1)$   

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \quad (*)$$

$$\text{余弦定理より } AB^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \cos \angle AOB$$

$$\cos \angle AOB = \frac{2 - (1+\sqrt{5})}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

(2)   $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$   

$$= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{OC}$$

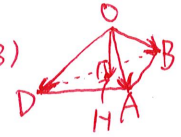
$$= \vec{a} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{c} - \vec{c}$$

$$= \vec{a} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{c}$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF}$$

$$= \vec{c} + \left( \vec{b} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{c} \right) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \vec{b} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \vec{c}$$

(3)   $\overrightarrow{OH} = (1-x-y)\overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OD}$   

$$= (1-x-y)\vec{a} + x\vec{b} + y(\vec{a} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{c})$$

$$= (1-x)\vec{a} + x\vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}y\vec{c}$$

$$-\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = \left\{ (1-x)\vec{a} + x\vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}y\vec{c} \right\} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$= (1-x)(\vec{a} \cdot \vec{a}) + x(\vec{b} \cdot \vec{a}) + \frac{1+\sqrt{5}}{2}y(\vec{c} \cdot \vec{a}) - (1-x)(\vec{a} \cdot \vec{b}) - x(\vec{b} \cdot \vec{b}) - \frac{1+\sqrt{5}}{2}y(\vec{c} \cdot \vec{b})$$

$$= 1-x + x\vec{a} \cdot \vec{b} + x\vec{b} \cdot \vec{a} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}y\vec{c} \cdot \vec{a} - (1-x)\vec{a} \cdot \vec{b} - x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}y\vec{c} \cdot \vec{b}$$

$$= 1-2x + (2x-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}y(\vec{c} \cdot \vec{a} - \vec{c} \cdot \vec{b})$$

$$= 1-2x + (2x-1)\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = (1-x)\vec{a} + x\vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}y\vec{c} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{c}$$

$$= (1-x)\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}y$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})}{2} + \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}y = 0$$

$$\therefore \frac{1+\sqrt{5}}{2}y = -1 \quad y = \frac{-2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\therefore \overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\vec{c}$$

$$|\overrightarrow{OH}|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \quad \therefore |\overrightarrow{OH}| = \frac{1}{2}$$

第11週 ①～③ 医学部合否決め問題演習

[入試演習 14]

座標空間内で点 $O(0, 0, 0)$ ,  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(2, 2, 0)$ ,  $C(0, 2, 0)$ ,  $D(0, 0, 2)$ ,  $E(2, 0, 2)$ ,  $F(2, 2, 2)$ ,  $G(0, 2, 2)$ を頂点とする1辺の長さ2の立方体(表面および内部)を $K$ とする。

また,  $t > 0$ として3点 $P(2t, 0, 0)$ ,  $Q(0, 2t, 0)$ ,  $R(0, 0, t)$ を頂点とする三角形(周および内部)を $T$ とする。 $K$ と $T$ の共通部分を $L$ として,  $L$ の面積を $S(t)$ とする。

(1)  $0 < t \leq 1$  のとき,  $S(t)$ を求めよ。

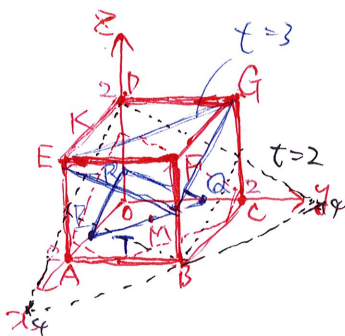
(2)  $L$ が三角形, 四角形, 五角形となる $t$ の範囲をそれぞれ $I_3, I_4, I_5$ とする。

$I_3, I_4, I_5$ を求めよ。

(3)  $1 < t \leq 2$  のとき,  $AB$ と $PQ$ の交点の座標および $AE$ と $PR$ の交点の座標を求めよ。

(4)  $t$ が(2)の $I_3 \cup I_4 \cup I_5$ の範囲にあるときの,  $u = S(t)$ のグラフの概形を $tu$ 平面に描け。

(大阪医科大)



(1)  $0 < t \leq 1$  とし,

$PQ = 2\sqrt{2}t$ 。かゝ.  $PQ$ の中点を $M$ とすると $M(t, t, 0)$

よて $OM = \sqrt{2}t$   $\therefore S(t) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}t \times \sqrt{2}t = \sqrt{2}t^2$

(2)  $t = 1$  とし,  $K$ と $T$ の共通部分 $L$ は, 3点 $(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1)$ を頂点とする二等辺三角形であり,  $0 < t < 1$  とし,

3点 $(2t, 0, 0), (0, 2t, 0), (0, 0, t)$ を頂点とする二等辺三角形である。

また,  $t = 2$  とし,  $L$ は $(0, 0, 2), (2, 0, 1), (2, 2, 0), (0, 2, 1)$ を頂点とするひし形。

$1 < t < 2$  とし,  $L$ は五角形。

さらに,  $t = 3$  とし,  $L$ は $E, G, (2, 2, 1)$ を頂点とする二等辺三角形。

$2 < t < 3$  とし,  $L$ は五角形,  $3 < t < 4$  とし,  $L$ は二等辺三角形,  $t = 4$  とし,  $L$ は点 $F$ 。

(したがって,  $I_3: 0 < t \leq 1, 3 \leq t < 4, I_4: t = 2, I_5: 1 < t < 2, 2 < t < 3$ )

(3)  $1 < t \leq 2$  とし, 三角形 $PQR$ の辺と立方体の辺 $AE, AB, BC, CD$ と交点をそれぞれ

$H, I, J, K$ とす。△ $OPQ$ で,  $AI$ と $OQ$ は平行で,  $OQ = OP = 2t$ であるから,

$AI = AP = 2t - 2$  あり,  $AB$ と $PQ$ の交点 $I$ の座標は $I(2, 2t - 2, 0)$ 。

また, 三角形 $PRO$ で $HA \parallel RO$ であるから,  $HA:PA = RO:PO = t:2t = 1:2$

より,  $HA = \frac{1}{2}PA = \frac{1}{2}(2t - 2) = t - 1$  であるから,  $AE$ と $PR$ の交点 $H$ の座標は $H(2, 0, t - 1)$ 。

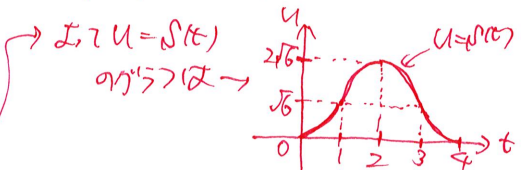
(4)  $I_3 \cup I_4 \cup I_5$ の範囲は,  $0 < t < 4$ である。  $0 < t \leq 1$  とし, (1)より,  $u = \sqrt{2}t^2$

$1 < t < 2$  とし,  $S(t)$ は五角形 $RHIJK$ の面積である。△ $RIH, \triangle JQK$ は△ $PQR$ と相似で, 相似比は

$\frac{t-1}{t}$  なるから,  $\sqrt{2}t^2 \{1 - (\frac{t-1}{t})^2\} = \sqrt{2}(t^2 + 4t - 2) = u$

$t = 2$  とし, ひし形の面積は  $u = 2\sqrt{2}$

$2 < t < 4$  とし, 図形の対称性から  $S(t) = S(4 - t)$



[演習-1]

一辺の長さが1の正二十面体の1つの面を $\triangle ABC$ とする、さらに外接球の中心を $O$ とする。  
すなわちこの正二十面体の12個の頂点は中心を $O$ とする1つの球の上にある。

次の問いに答えなさい。

- (1) 3点 $A, B, O$ を通る平面でこの正二十面体を切ったとき、切り口として得られる六角形の面積を求めなさい。
- (2)  $O$ から $\triangle ABC$ に下ろした垂線の足を $D$ とすると、線分 $OD$ の長さを求めなさい。

(産業医科大)

(1) 図1aのような、一辺の長さが1の正二十面体を、

3点 $A, B, O$ を通る平面で切ったときの切り口は、

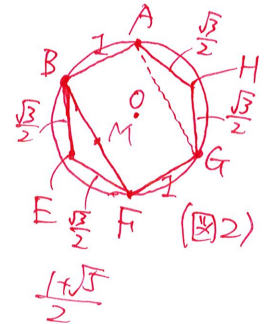
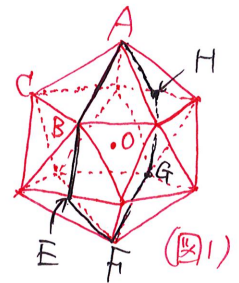
図2のような、 $AB=FG=1, BE=EF=GH=HA=\frac{\sqrt{3}}{2}$ の六角形である。 $(ABEFGH)$

ここで、 $BF$ の長さは右の。

図1aの正五角形の対角線 $x$ として

$$x:1 = 1:(x-1) \rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned} \triangle PQR \text{ について } \textcircled{4} \text{ コサインの法則 } & \frac{1^2 + 1^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} \\ &= \frac{8 - (1+\sqrt{5})^2}{8} \\ &= \frac{2-2\sqrt{5}}{8} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \end{aligned} \quad \therefore BF = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



$$\begin{aligned} EM^2 &= BE^2 - BM^2 \\ &= \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})^2}{8} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3(6+2\sqrt{5})}{8} \\ &= \frac{24-3(6+2\sqrt{5})}{8} \\ &= \frac{15-3\sqrt{5}}{8} = \frac{3(5-\sqrt{5})}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle ABEF &= \frac{1}{2} \times BF \times EM \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{3}(5-\sqrt{5})}{8} \\ &= \frac{3\sqrt{3}(6+2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{32\sqrt{5}} \\ &= \frac{3\sqrt{20+4\sqrt{5}}}{32\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle BEF \text{ について } \textcircled{5} \text{ コサインの法則 } & \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot 1} \left(x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \frac{x}{\sqrt{3}} \quad \therefore \sin \angle EBF = \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\therefore \triangle ABEF = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore (\text{長方形 } ABEFG) + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{2+\sqrt{5}}{2}$$

(2) B



$$OA = OB = \frac{1}{2} AF = \frac{1}{2} \sqrt{1+2}$$

$$BK = \frac{2}{3} BE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$OD = OK = \sqrt{OB^2 - BK^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(1+2) - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{5}}{12}$$



## [演習-2]

図のような一辺の長さが1の立方体 $ABCD-EFGH$

において、点 $P, Q, R$ は辺 $AB, AD, FG$ 上の点で、

$AP:AQ:GR=2:2:1$ を満たしている。

$AP=x$ とおき、 $\overrightarrow{EA}=\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{EF}=\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{EH}=\vec{c}$ とおく。

以下の問いに答えなさい。

(1)  $\overrightarrow{PR}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ および $x$ を用いて表しなさい。

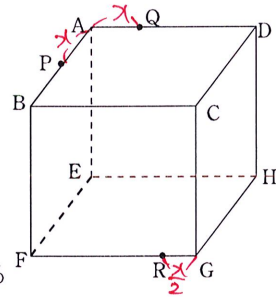
(2)  $0 < x \leq 1$ とする。辺 $BF$ 上に点 $S$ を、3点 $P, Q, R$ が定める

平面 $\alpha$ 上に $S$ があるように選ぶ。このとき $\overrightarrow{PS}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ および $x$ を用いて表しなさい。

(3)  $0 < x \leq 1$ とする。この立体を(2)の平面 $\alpha$ で切った切り口の図形の周の長さを $L$ と

する。 $L$ が最小となるときの $x$ の値とそのときの $L$ の値を求めなさい。

(日本大一医)



$$\begin{aligned}
 (1) \overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{ER} - \overrightarrow{EP} \\
 &= (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FR}) - (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AP}) \\
 &= \vec{b} + (1-x)\vec{c} - (\vec{a} + x\vec{b}) \\
 &= -\vec{a} + (1-x)\vec{b} + (1-x)\vec{c}
 \end{aligned}$$

(2)  $BS=y$  とおくと、 $S$ は辺 $BF$ 上にあり、

$$\overrightarrow{PS} = (1-x)\vec{b} - y\vec{a} \quad \text{--- ①}$$

また、 $S$ は平面 $PQR$ 上にあり、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PS} &= s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR} \\
 &= s(-x\vec{b} + x\vec{c}) + t\{-\vec{a} + (1-x)\vec{b} + (1-x)\vec{c}\} \quad ((1)より) \\
 &= -t\vec{a} + \{1-sx+t(1-x)\}\vec{b} + \{sx+t(1-x)\}\vec{c} \quad \text{--- ②}
 \end{aligned}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  は一次独立なベクトル。①, ②より、

$$\begin{cases} y = t \\ 1-x = -sx + t(1-x) \\ 0 = sx + t(1-x) \end{cases} \Rightarrow t = \frac{2(1-x)}{4-3x} \quad (\because 4-3x \neq 0) \\
 0 = sx + t(1-x) = y$$

$$\text{②より} \quad \overrightarrow{PS} = -\frac{2(1-x)}{4-3x}\vec{a} + (1-x)\vec{b}$$

$$(3) PS = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{(1-x)^2 + \left(\frac{2(1-x)}{4-3x}\right)^2} \\
 &= \frac{1-x}{4-3x} \sqrt{20-24x+9x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SR &= \sqrt{(1-y)^2 + \left(1-\frac{x}{2}\right)^2} \\
 &= \frac{2-x}{2(4-3x)} \sqrt{20-24x+9x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= PQ + RT + 2(PS + SR) \\
 &= \frac{3\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{20-24x+9x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dx} &= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{-12+9x}{\sqrt{20-24x+9x^2}} \\
 &= \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{20-24x+9x^2} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2}x)}{2\sqrt{20-24x+9x^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dx} &= 0 \text{ とおくと} \\
 \sqrt{20-24x+9x^2} &= \sqrt{2}(4-3x) \\
 \text{両辺2乗して整理すると} & \\
 (x-2)(3x-2) &= 0
 \end{aligned}$$

$$x = 2, \frac{2}{3}$$

$x$	0	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{dL}{dx}$	-	0	+
$L$	✓	✓	✓

$$x = \frac{2}{3} \text{ とき、} L = 3\sqrt{2}$$

$$L = 3\sqrt{2}$$

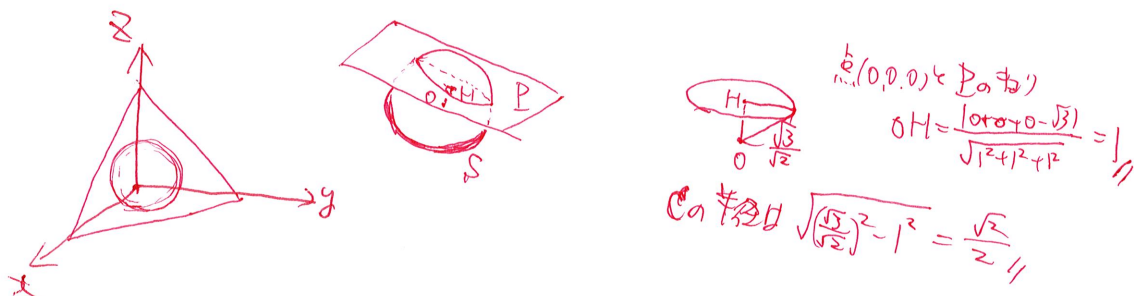
## [演習-3]

(1) 空間において、球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{2}$  を平面  $P: x + y + z = \sqrt{3}$  で切つてできる切

り口の円を  $C$  とする。円  $C$  を含む平面に原点  $O$  から下ろした垂線の足を  $H$  とする。

$OH$  の長さと円  $C$  の半径を求めよ。

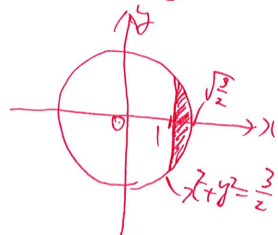
(2) (1) の球面  $S$  の内部で、3つの座標平面および平面  $P$  で囲まれた四面体の内部に含まれる部分の体積を求めよ。  
(昭和大一医)



(2) 平面に切り取られた部分の体積を  $V_1$  とすると求める体積  $V$  は

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - V_1$$

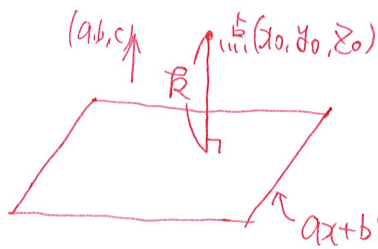
$V_1$  については



$$V_1 = \pi \int_1^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{3}{2} - x^2\right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{6}\right)$$

$$\text{よって } V = \left(\frac{7}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)\pi //$$



$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{①}$$

点と平面が与えられたとする。

$(x_0, y_0, z_0)$  を通り、平面に垂直な直線は

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$$\text{①に代入 } a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$$

$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

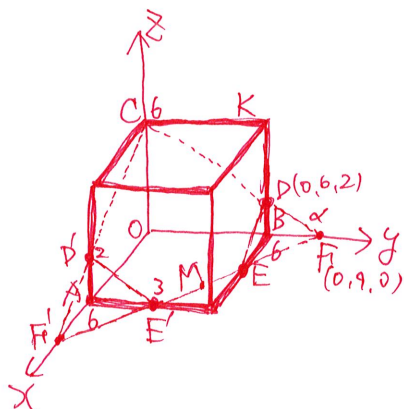
$$\text{よって } R = |t| \times |(a, b, c)|$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{とある。}$$

## [演習-4]

$xyz$  座標空間において、原点を  $O$  とし、3点  $A(6, 0, 0)$ ,  $B(0, 6, 0)$ ,  $C(0, 0, 6)$  をとる。  
 $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  を辺にもつ立方体を  $K$  とし、3点  $C$ ,  $D(0, 6, 2)$ ,  $E(3, 6, 0)$  を通る平面  
 を  $\alpha$  とする。このとき、立方体  $K$  の内部にある平面  $\alpha$  の部分の面積を求めよ。

(京都府立医大)



立方体  $K$  は、3点  $O(0, 0, 0)$ ,  $C(0, 0, 6)$  と  
 $(6, 6, 0)$  を通る平面に関して対称だから

平面  $\alpha$  は  $D'(6, 0, 2)$ ,  $E'(6, 3, 0)$  を通る。

また、 $yz$  平面上で直線  $CD$  の方程式は

$$\begin{aligned} z &= \frac{2-6}{6-0}y + 6 \\ &= -\frac{2}{3}y + 6 \end{aligned} \quad \begin{aligned} z=0 \text{ と } y=9 \end{aligned} \rightarrow y=9, F(9, 0, 0) \text{ を通る。}$$

対称性により、 $\alpha$  は  $F'(9, 0, 0)$  を通る。

また、図より  $E(3, 6, 0)$ ,  $E'(6, 3, 0)$  を通ることから、

$$\text{まず } CF = \sqrt{6^2 + 9^2} = 3\sqrt{13} = CF', \quad FF' = \sqrt{9^2 + 9^2} = 9\sqrt{2} \text{ である。}$$

$$DE = DF = \sqrt{13}, \quad EF = 3\sqrt{2}$$

$$\boxed{\triangle CFF' \sim \triangle DFE \text{ 相似比 } 3:1}$$

$$\begin{aligned} FF' \text{ の中点 } M \text{ とすると } FM &= \frac{9\sqrt{2}}{2} \text{ である。} \quad CM = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - \left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= 3\sqrt{\frac{17}{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times FF' \times CM \times \left(1 - \frac{1}{3} \times 2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 9\sqrt{2} \times 3\sqrt{\frac{17}{2}} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}} \times 7$$

$$= \frac{21\sqrt{17}}{2}$$