

第10週 ⑥～⑧ 医学部合否決め問題演習

[入試演習 11]

数字1, 2, ..., n が1つずつ書かれている n 個の玉と、区別のつかない k 個の箱がある。
ここで $1 \leq k \leq n$ とする。このとき、空の箱が生じない玉の入れ方の総数を ${}_nS_k$ で表す。
以下のように、 ${}_nS_k$ のいくつかの値とその漸化式を求めてみよう。

- (1) まず、 $k=n$ および $k=1$ の場合はそれぞれ、 ${}_nS_n = \boxed{}$ 、 ${}_nS_1 = \boxed{}$ である。
- (2) 次に、 $k=n-1$ の場合を考える。このときは、箱の数が玉の数より1つ少ないので、玉が2つ入る箱ができる。そこで、求めるものは n 個の玉から2つの玉を選ぶ仕方の総数と同じであるから、 ${}_nS_{n-1} = \boxed{}$ となる。
- (3) さらに、 $k=2$ の場合は、玉 n (数字 n が書かれている玉) を先にどれかの箱に入れる。すると残った $n-1$ 個の玉については、それぞれ玉 n の入っている箱に入れるか入れないかの2通りの場合が生ずる。
- ゆえに、これらの $n-1$ 個の玉を2つの箱に入れる仕方の総数は $\boxed{}$ であるが、このうち空の箱ができる場合を除くので、 ${}_nS_2 = \boxed{}$ と求められる。
- (4) 今度は ${}_5S_3$ を求めてみよう。このとき玉5に注目すると次の2つの場合のどれかが起きる。第1の場合は、玉5を先に1つの箱に入れた後、残った4つの玉を、玉5の入っていない残りの2つの箱に入れる場合である。その仕方の総数は ${}_4S_2 = \boxed{}$ である。第2の場合は、玉5以外の4つの玉を3つの箱に入れた後、玉5をそれらの箱のどれかに入れる場合であり、その仕方の総数は $3 \times {}_4S_3 = \boxed{}$ である。この2つの場合は互いに排反なので、 ${}_5S_3 = 3 \times {}_4S_3 + {}_4S_2 = \boxed{}$ が得られる。
- (5) (4)の方法を一般化すると漸化式 ${}_nS_k = k \times \boxed{} + \boxed{}$ が得られる。
- (6) (5)を用いると、例えば ${}_6S_4 = \boxed{}$ と計算できる。 (金沢医科大学)

①～④の球と箱の箱。

(1) $k=n$ のとき。

n 個の球を n 個の箱に入れる。

よって ${}_nS_n = 1$ //

② $k=1$ のとき

n 個の球を1個の箱に入れる。 ${}_nS_1 = 1$ //

(2) $k=n-1$ のとき

${}_nS_{n-1} = nC_2$ ← 2つの球を1つの箱に入れる。2つ入れ。

$= \frac{n(n-1)}{2}$ //

(3) $k=2$ のとき

① $(n-1)$ 個の玉を2つの箱に入れる仕方は 2^{n-1} 通り //

② 空の箱が1つあるのは1通り (①の箱に全部集まる) //

よって ${}_nS_2 = 2^{n-1} - 1$ //

(4) (2)と(3)より⑤に玉5後。
 ${}_5S_2$ と ${}_5S_3$ を利用する。

⑤ ①～④を
⑤ ${}_5S_2 = 2^4 - 1 = 7$ //

⑥ ⑤に玉5
⑥ ${}_5S_3 = \frac{5 \times 4}{2} = 6$ //

⑦ $3 \times {}_4S_3 = 18$ //

⑧ ⑦に玉5
⑧ ${}_5S_3 = 3 \times {}_4S_3 + {}_4S_2 = 18 + 7 = 25$ //

(5) 同様にして

${}_nS_k = n \times {}_{n-1}S_k + {}_{n-1}S_{k-1}$ //

(6) ${}_6S_4 = 5 \times {}_5S_3 + 4 \times {}_5S_4 = 25 + 4 \times (10) = 65$ //

前提の
なし
たとえば5玉は
異なる5つの箱に
3つの箱に分ける。
 $\frac{{}_5S_3 - {}_3C_2(2^3 - 2) - 3}{3!}$
 $= \frac{243 - 90 - 3}{6}$
 $= \frac{150}{6} = 25$

6玉は異なる6つの箱に
4つの箱に分ける。
 $\frac{{}_6S_4 - 4C_3(2^4 - 2) - 4C_2(2^3 - 2) - 4}{4!}$
 $= \frac{1}{24}(4096 - 4(128 - 62 \times 3 - 3) - 6 \times 62 - 4)$

✓ [入試演習 12]

数直線上の点の集合 $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ を考え、点 -1 上と点 1 上にそれぞれ球を1個ずつ置き、他の点上には何も置かないものとする。いま次の操作を何回か繰り返す。

S 上にある各球を互いに独立に、確率 $\frac{1}{2}$ ずつで数直線上の正の方向か負の方向に1だけ同時に動かす。ただし、同時に同じ点上を占めた2個の球については2球とも S 上から取り除くものとし、点 -3 上あるいは点 3 上を占めた球についてはその球を S 上から取り除くものとする。

以下、 n, m を自然数とする。

(1) 1回目の操作を終えたとき、 S 上に球が2個存在している確率は である。

(2) 2回目の操作を終えたとき、 S 上に球が2個存在している確率は 。

S 上に球が1個だけ存在している確率は である。また、2回目の操作において S 上にある2個の球が初めて同時に同じ点上を占めたことにより S 上から取り除かれる確率は である。

(3) n 回目の操作を終えたとき、 S 上に球が2個存在している確率 P_n を求めると、

$P_{2m-1} = \text{}$, $P_{2m} = \text{}$ である。

(4) n 回目の操作を終えるまでに、 S 上にある2個の球が同時に同じ点上を占めること

により S 上から取り除かれる確率を求めなさい。

(慶應義塾大一医)

(1) 余事象: 2球とも点0上を占める。
求める確率は $1 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$



(3) 2m回の操作を終えたときに
 S 上に球が2個存在するとは、
 A が -1 、 B が 1 にいること。つまり、

$$\begin{cases} P_{2m+1} = \frac{3}{4} P_{2m} \\ P_{2m+2} = \frac{3}{16} P_{2m} \end{cases}$$

$$\text{④より } P_{2m} = P_2 \times \left(\frac{3}{16}\right)^{m-1} = \left(\frac{3}{16}\right)^m$$

$$\text{したがって } P_{m-1} = \frac{3}{4} P_{2m-2} = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{16}\right)^{m-1}$$

(4) m 回目の操作にて、2個の球が同時に同じ点上を占めることにより取り除かれる確率を Q_m とおく。(P_n を利用) (2) のより

$$\begin{aligned} Q_{2m+1} &= \frac{1}{4} P_{2m}, Q_{2m+2} = \frac{1}{8} P_{2m} \text{ (2) のより} \\ \text{求める確率を } R_n \text{ とすると} \\ R_m &= \sum_{k=1}^m (Q_{2k-1} + Q_{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{4} P_{2k-2} + \frac{1}{8} P_{2k-2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{3}{8} P_{2k-2} \\ &= \frac{3}{8} \sum_{k=1}^m \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} = \frac{6}{13} \left(1 - \left(\frac{3}{16}\right)^m\right) \end{aligned}$$

(2) 最初に $-1, 1$ におかれた球をそれぞれ A, B とする。

1回目に取り除かれる場合を除いて考える。

A	B
$-1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ (02) - ①
$-1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ (12) - ②
$-1 \rightarrow 0 \rightarrow -1$	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ (22) - ③
$-1 \rightarrow 0 \rightarrow -1$	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ (12) - ④
$-1 \rightarrow -2 \rightarrow -1$	$1 \rightarrow 0 \rightarrow -1$ (02) - ⑤
$-1 \rightarrow -2 \rightarrow -1$	$1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$ (22) - ⑥
$-1 \rightarrow -2 \rightarrow -1$	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ (22) - ⑦
$-1 \rightarrow -2 \rightarrow -1$	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ (12) - ⑧
$-1 \rightarrow -2 \rightarrow 3$	$1 \rightarrow 0 \rightarrow -1$ (12) - ⑨
$-1 \rightarrow -2 \rightarrow 3$	$1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$ (12) - ⑩
$-1 \rightarrow -2 \rightarrow 3$	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ (12) - ⑪
$-1 \rightarrow -2 \rightarrow 3$	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ (02) - ⑫

2個存在しているのは $\frac{3}{16}$ 、
1個存在 " $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

②④⑧⑨⑩⑪
残り2個同じ点上を占めて
取り除かれるのは
①③⑤⑦ $\therefore \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

$$\begin{aligned} R_{2m-1} &= R_{2m} - Q_{2m} \\ &= \frac{6}{13} \left(1 - \left(\frac{3}{16}\right)^m\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{3}{16}\right)^m \\ &= \frac{6}{13} - \frac{44}{39} \left(\frac{3}{16}\right)^m \end{aligned}$$

[演習 - 1]

大小2つのサイコロを投げて、出た目の数をそれぞれ a, b とする。 x, y に関する連立方程式 $2x + y = 2$, $ax + by = 3$ について次の各問いに答えよ。

(1) 解をもたない確率を求めよ。

(2) 2組以上の解をもつ確率を求めよ。

(3) ただ1組の解をもち、 x, y ともに正となる確率を求めよ。

(杏林大一医)

全事象は $6^2 = 36$ 通り

(1) 解をもたないのは、2直線が平行(一致せず)

平行条件は $2b = a$ $\therefore (a, b) = (2, 1), (4, 2), (6, 3)$

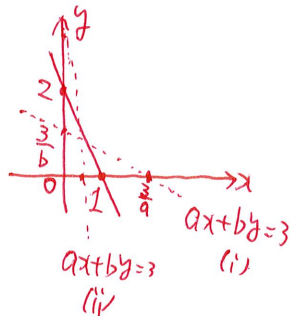
一致してはならない $a = 3a$ とするとき a は 0 であるから $a = 0$ $\therefore \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

(2) 2組以上の解をもつのは、2直線が一致するとき、(1)よりこれはないので 0

(3) ただ1組の解を $x > 0, y > 0$ とも満たす。

2直線が平行であるか1象限で交わるか“よい”。

$$\begin{cases} ax + by = 3 \\ -) 2bx + by = 2b \\ \hline (2b-a)x = 2b-3 \\ x = \frac{2b-3}{2b-a} > 0 \end{cases} \quad \text{不変!}$$



$$(i) 1 < \frac{3}{a} \text{ かつ } 0 < \frac{3}{b} < 2 \text{ かつ}$$

$$\Leftrightarrow 0 < a < 3 \text{ かつ } b > \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = 1, 2 \text{ かつ } b = 2, 3, 4, 5, 6$$

の10通り

$$(ii) 0 < \frac{3}{a} < 1 \text{ かつ } \frac{3}{b} > 2 \text{ かつ}$$

$$a > 3 \text{ かつ } b < \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = 4, 5, 6 \text{ かつ } b = 1$$

の3通り

$$(i), (ii) \text{ より } \frac{10+3}{36} = \frac{13}{36}$$

[演習-2]

n を3以上の自然数とする。このとき、正 $2n$ 角形の頂点から無作為に異なる4つの頂点を選び、それぞれ A, B, C, D とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle ABC$ が直角三角形である確率を求めよ。

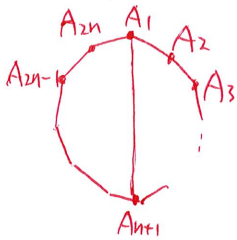
(2) A, B, C, D から3つの頂点を選んで得られるすべての三角形の集合を考える。

その集合の少なくとも1つの要素が直角三角形である確率を求めよ。

(3) $\triangle ABC$ が鈍角三角形である確率を P_n とする。 n を限りなく大きくするとき、 P_n の

極限値を求めよ。

(産業医科大)



$$(1) \text{ 起こりうるすべての場合の数は } {}_{2n}C_3 = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}$$

$$\therefore \text{ 直角三角形となるものについて } = \frac{2n(2n-1)(n-1)}{3} \text{ 通り}$$

$A_1 A_{n+1}$ を斜辺とするものは $2(n-1)$ 通り、斜辺の決め方は n 通り。

$$\therefore \frac{2(n-1) \times n}{\frac{2n(2n-1)(n-1)}{3}} = \frac{3}{2n-1} //$$

(2) A, B, C, D からどの3点を選んでも直角三角形が出来ない確率を考える。(対象)

まず、全事象を、4点 A, B, C, D の順に選ぶと考え、 $2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)$ 通り。

仮に $A=A_1$ とすると、 B は A_1 の向かいの A_{n+1} 以外の $2n-2$ 通り、 B の決め方は $(2n-2)$ 通り。

その後、 C の決め方は $(2n-4)$ 通り、 D の決め方は $(2n-6)$ 通り。

よって求める確率は、

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2n(2n-2)(2n-4)(2n-6)}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)} &= 1 - \frac{(2n-4)(2n-6)}{(2n-1)(2n-3)} \\ &= \frac{3(4n-7)}{(2n-1)(2n-3)} // \end{aligned}$$

(3) O を正 $2n$ 角形の中心とし、 $\triangle OA_i OA_j$ ($0 < j < i < n$) を

$\angle A_i$ が鈍角の鈍角三角形とする。ただし、 $2 \leq i < j \leq 2n$

であり、 $\angle A_i O A_j > 180^\circ$ より $(j-i) \times \frac{360^\circ}{2n} > 180^\circ$

(A_i 含まない)

$$\therefore j-i > n \text{ より } j > i+n \dots (2)$$

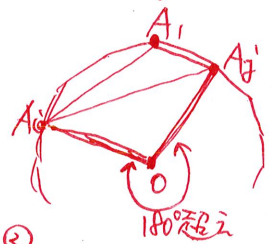
ここで、 i を固定すると j の決め方は $n+i+1, n+i+2, \dots, 2n$ の $n-i$ 通り。

②より $j=2n$ のとき i は $n-1$ まで。つまり i は $2 \sim (n-1)$ の値をとる。

$$\triangle OA_i OA_j \text{ の決め方は } \sum_{i=2}^{n-1} (n-i) = \sum_{k=1}^{n-2} k = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

$$\text{鈍角の決め方は } 2n \text{ 通り。} \therefore P_n = \frac{2n \times \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \times 3!}{2n(2n-1)(2n-2)}$$

$$= \frac{3(n-2)}{2(2n-1)} \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{3}{4} //$$



[演習-3]

ある疾病Aを検出する医学検査Bを考える。Bには陽性と陰性の2通りの結果だけがある。疾病Aの患者がこの検査Bを受けたとき陽性になる確率は a ($0 < a \leq 1$) であり、健康者(Aの患者でないもの)がBを受けたとき陽性になる確率は b ($0 < b \leq 1$) である。ある集団Xにおいて、疾病Aの患者がしめる割合を p ($0 < p \leq 1$) とする。この集団から無作為に1人を抽出した。以下の間に答えよ。

- (1) 抽出された人が検査Bを受けたとき陽性になる確率を求めよ。
- (2) 抽出された人が検査Bで陽性であったとき、その人が疾病Aの患者である確率 d_+ を p の式で表せ。
- (3) 抽出された人が検査Bで陰性であったとき、その人が疾病Aの患者である確率 d_- を p の式で表せ。
- (4) 検査Bは、疾病Aの患者が受ければ必ず陽性に出て、健康者(Aの患者でないもの)が受ければ30人に1人の割合で陽性に出るものとする。また、集団Xでは疾病Aの患者が100人に1人の割合で存在すると仮定する。このとき、 d_+ の値を四捨五入により小数第2位まで求めよ。
- (5) d_+ が0.5以上となるためには $\frac{a}{b}$ はどのような範囲になければならないか。

p を用いた不等式により表せ。

(昭和大一医)

	検査Bが陽性	検査Bが陰性
疾病Aの患者	pa	$p(1-a)$
健康者	$(1-p)b$	$(1-p)(1-b)$

$$(1) pa + (1-p)b //$$

$$(2) d_+ = \frac{pa}{pa + (1-p)b} //$$

$$(3) d_- = \frac{p(1-a)}{p(1-a) + (1-p)(1-b)} //$$

$$(4) a=1, b=\frac{1}{30}, p=\frac{1}{100}$$

このときの d_+ を求めよ。

$$\begin{aligned} d_+ &= \frac{pa}{pa + (1-p)b} \\ &= \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{100} + \frac{99}{100} \times \frac{1}{30}} \\ &= \frac{10}{10 + 33} \\ &= 0.2325 \\ &\Downarrow \\ &0.23 // \end{aligned}$$

$$(5) d_+ \geq \frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$\frac{pa}{pa + (1-p)b} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2pa \geq pa + (1-p)b$$

$$\Leftrightarrow pa \geq (1-p)b$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \geq \frac{1-p}{p} //$$

[演習-4]

四角形の4つの頂点に1, 2, 3, 4と時計まわりに番号がつけられている。

時刻0において、この四角形の頂点1と頂点3の上をそれぞれ1つずつの粒子が占めているとし、頂点2と頂点4の上には粒子は存在しないものとする。(図1を参照のこと)

その後、1秒ごとに、存在する粒子の中で最小の番号の頂点上を占める粒子が、確率 $\frac{1}{2}$

で消滅し、確率 $\frac{1}{4}$ ずつで隣り合う2つの頂点のいずれかに移動する。ただし、移動した

頂点上をすでに他の粒子が占めている場合は、その粒子と合体して1つの粒子になるものとする。

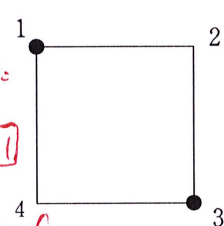
以下、 n, m を自然数とする。

時刻 n (秒)において、この四角形の4つの頂点のうち1つの頂点上にのみ粒子が存在する確率を P_n で表し、4つの頂点のいずれの上にも粒子が存在しない確率を Q_n で表す。

(1) $P_2 = \square$, $Q_2 = \square$ である。

(2) 一般に、 $P_{2m-1} = \square$, $P_{2m} = \square$ であり、 $Q_{2m-1} = \square$, $Q_{2m} = \square$ である。

図1



P_n : n 秒後に1つ
 Q_n : n 秒後に0つ

$P_n + Q_n + R_n = 1$

(1) Q_2 : 1と3にいる粒子が
11秒に消滅。 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

R_2 は

$(1,3) \rightarrow (2,3) \rightarrow (1,3)$
あ
 $(1,3) \rightarrow (3,4) \rightarrow (2,4)$

またもに消滅と(消滅) + (2秒消滅) + (合体) = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$\therefore P_2 = 1 - Q_2 - R_2 = \frac{5}{8}$

(2) $\{R_n\}$ について、 $R_1 = \frac{1}{2}$ より $R_{2m-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{m-1}$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$

もしはるのま R_2 で。
 $R_{2m} = R_{2m-1} \times \frac{1}{4}$
 $= \left(\frac{1}{8}\right)^m$

したがって、 $P_{2m+1} = P_{2m} \times \frac{1}{2} + R_{2m} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} P_{2m} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right)^m$... ①

同様に、 $P_{2m} = P_{2m-1} \times \frac{1}{2} + R_{2m-1} \times \frac{3}{4}$

$= \frac{1}{2} P_{2m-1} + 3 \left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}$... ②

①、②より、 $P_{2m+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} P_{2m-1} + 3 \left(\frac{1}{8}\right)^{m-1} \right) + \left(\frac{1}{8}\right)^m$
 $= \frac{1}{4} P_{2m-1} + 2 \left(\frac{1}{8}\right)^m$

よって、両辺に 4^m をかけて

$4^m P_{2m+1} - 4^{m-1} P_{2m-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$

$m \geq 2$ のとき

$4^{m-1} P_{2m-1} = 4^0 P_1 + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}}{1 - \frac{1}{2}}$

$= \frac{5}{2} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$

$\therefore P_{2m-1} = \frac{5}{2 \cdot 4^{m-1}} - \frac{2}{8^{m-1}} \quad (m=1 \text{ とき } 0, k)$

よって、 $P_{2m} = \frac{5}{4^m} - \frac{1}{8^m}$

次に $Q_{2m-1} = 1 - P_{2m-1} - R_{2m-1}$

$= 1 - \frac{5}{2 \cdot 4^{m-1}} - \frac{3}{2 \cdot 8^{m-1}}$

(1) \rightarrow (2)
同様に、 R_n 系を適用。
偶数回目に2つ残るのは
奇数回目に2つ残るのは

(慶應義塾大一医)

[演習-5]

A氏、B氏はそれぞれ1から4までの番号が1つつ書いてある4枚のカードを持っている。

1枚ずつカードを出し合い、次の回には残りのカードから1枚ずつ出し合う。

- (1) 1回目にカードの番号が同じになる確率を求めよ。
- (2) 2回目に初めてカードの番号が同じになる確率を求めよ。
- (3) 3回目に初めてカードの番号が同じになる確率を求めよ。
- (4) 4回目に初めてカードの番号が同じになる確率を求めよ。

(北里大一医)

たとえばA氏の取り出したカードの番号を順に $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4$ としてこれを固定しておく。この取り出し方に対して、B氏の取り出したカードを順に b_1, b_2, b_3, b_4 とする。

このときB氏のカードの取り出し方は全部で $4! = 24$ 通り。

(1) $b_1 = 1$ とするB氏のカードの取り出し方は $3!$ 通りあるから、 $\frac{3!}{4!} = \frac{1}{4}$ //

(2) $b_1 \neq 1$ かつ $b_2 = 2$ とするaは、

$b_1 = 3 \text{ or } 4$, $b_2 = 2$ であるから、B氏のとり方は $2 \times 1 \times 2! = 4$ 通り、

$\therefore \frac{4}{4!} = \frac{1}{6}$ //

(3) $b_1 \neq 1$ かつ $b_2 \neq 2$ かつ $b_3 = 3$ とするaは

$(b_1, b_2) = (2, 1), (2, 4), (4, 1)$. a ときたから、B氏のとり方は $3 \times 1 = 3$ 通り、

$\therefore \frac{3}{4!} = \frac{1}{8}$ //

(4) $b_1 \neq 1, b_2 \neq 2, b_3 \neq 3, b_4 = 4$ とするaは

$(b_1, b_2, b_3) = (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ a ときたから、B氏のとり方は 2 通り、

$\therefore \frac{2}{4!} = \frac{1}{12}$ //

(1) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 4 = \frac{1}{4}$ //

(2) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{24}$ //